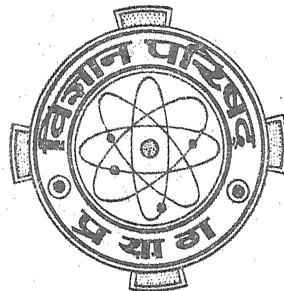
विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 43 January 2000 No. 1



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-211002

विषय-सूची

Vol. 43 January 2000 No. 1

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.1, January, 2000.

एज़ोला कैरोलिनियाना की वृद्धि एवं नाइट्रोजन-स्थिरीकरण पर फॉस्फोरस तथा जस्ते का प्रभाव

बी. आर. मौर्य, ए. के. सिंह एवं बी. एन. मंगराज

मृदा विज्ञान एवं कृषि रसायन विभाग, कृषि विज्ञान संस्थान, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी (उ. प्र.)

[प्राप्त-दिसम्बर 4, 1999]

सारांश

फॉस्फोरस (0, 7 एवं 14 पी. पी. एम.) तथा जस्ता (जिंक) (0, 0.05 एवं 0.1 पी. पी. एम.) की तीन मात्राओं का एक विलयन कल्चर–परीक्षण एज़ोला की वृद्धि एवं नाइट्रोजन–स्थिरीकरण पर 9 उपचार एवं 9 पुनरावृत्ति के साथ पूर्णतया यादृच्छिक अभिकल्पना के कारकीय परीक्षण के अन्तर्गत किया गया, जिसमें ताज़ा एवं शुष्क जैविक भार, संपूर्ण हरित लवक की मात्रा, वानस्पतिक कोशिकाओं की संख्या प्रति हेटरोसिस्ट, हेटरोसिस्ट की संख्या प्रति सेमी. एज़ोला–शैवाल, कार्बनिक कार्बन तथा नाइट्रोजन की मात्रा का अध्ययन खरीफ एवं रबी मौसमों में 10, 20, 30 दिन पर किया गया। ताज़ा जैविक भार एवं नाइट्रोजन की मात्रा 7 पी. पी. एम. फॉस्फोरस के साथ अधिक पायी गयी। खरीफ में प्रारम्भिक वृद्धि के दिनों में ताज़ा जैविक भार रबी की अपेक्षा अधिक तथा नाइट्रोजन की मात्रा रबी में खरीफ़ की अपेक्षा अधिक पाई गयी जबकि 14 पी. पी. एम. फॉस्फोरस के साथ ताज़ा जैविक भार एवं नाइट्रोजन की मात्रा अपेक्षाकृत कम प्राप्त हुई। जस्ते की 0.1 पी. पी. एम. मात्रा 0.05 पी. पी. एम. की अपेक्षा एज़ोला के साथ अधिक वृद्धिकारक पायी गयी। हेटरोसिस्ट कोशिकाओं की प्रति सेमी. संख्या पर मौसम परिवर्तन का कोई प्रभाव नहीं रहा, जबकि नाइट्रोजन की मात्रा एवं प्रति सेमी. औसत हेटरोसिस्ट की संख्या पर बढ़ते समय का प्रतिकूल असर पाया गया। कार्बनिक कार्बन की मात्रा बढ़ते समय के साथ अधिक पायी गयी। दूसरी ओर, जस्ता 0.05 पी. पी. एम. तथा 7.0 पी. पी. एम. फॉस्फोरस के एकल एवं संयुक्त प्रयोग से हरित तवक की मात्रा प्रारम्भिक दिनों में अधिक पाई गयी। हरितलवक

की मात्रा पर मौसम परिवर्तन के स्पष्ट प्रभाव के फलस्वरूप घटते ताप के कारण हरित लवक की मात्रा घटती गयी। एज़ोला के 20 दिन पर रबी में तथा 30 दिन पर खरीफ में हरित लवक में क्रमिक वृद्धि पाई गयी।

Abstract

Effect of P and Zn on the growth and nitrogen fixation by *Azola caroliniana*. *By* B. R. Maurya, A. K. Singh and B. N. Mangraj, Department of Soil Scienc and Agricultural Chemistry, Agriculture Institute, B. H. U., Varanasi (U. P.).

A low dose of P on the growth, nitrogen fixation and heretrocyst number of *azola caroliniana* is beneficial but the effect of higher doses of Zn needs further study.

एज़ोला एक जलीय फर्न है जो जल की सतह पर तैरता रहता है, इसकी पत्तियों में हेटरोसिस्ट, नाइट्रोजन-स्थिरीकारक नील-हरित शैवाल एनाबिना एज़ोली अन्तः सहजीवी के रूप में पाया जाता है। जलीय पारिस्थितिकी में नाइट्रोजन प्रदान करने में एज़ोला का बड़ा महत्वपूर्ण योगदान है। चीन एवं वियतनाम में इसका प्रयोग धान में कार्बनिक नाइट्रोजन स्रोत के रूप में बड़े पैमाने पर किया जाता रहा है और अब भारत में भी इसके प्रयोग का प्रयास किया जा रहा है[6]। विभिन्न प्रयोगों से यह ज्ञात हो चुका है कि अकेले एज़ोला के प्रयोग से धान में 30 कि. ग्रा./हे. नाइट्रोजन के बराबर उपज प्राप्त होती है।

एज़ोला के समुचित विकास एवं नाइट्रोजन–स्थिरीकरण के लिए अनेक मुख्य एवं सूक्ष्म तत्वों की आवश्यकता होती है। फॉस्फोरस तथा जस्ता इसी तरह के महत्वपूर्ण तत्व हैं जो एज़ोला द्वारा नाइट्रोजन -स्थिरीकरण, वृद्धि तथा विकास के साथ-साथ उसमें तत्वों की कमी से उत्पन्न दुष्प्रभाव को दूर करते हैं[4, 5, 6]। एज़ोला के लिए जलीय घोल में फॉस्फोरस का प्रभाव तो ज्ञात है, परन्तु जस्ता के साथ बहुत कम शोधकार्य हुआ है। प्रस्तुत शोध एज़ोला कैरोलिनियाना की वृद्धि एवं नाइट्रोजन–स्थिरीकरण पर फॉस्फोरस एवं जस्ता का प्रभाव ज्ञात करने के उद्देश्य से पूर्वी उत्तर प्रदेश के कृषि जलवायु क्षेत्र में खरीफ एवं रबी में सम्पन्न किया गया।

प्रयोगात्मक

सामग्री एवं परीक्षण विधि

खरीफ़ (अगस्त–सितम्बर), रबी (नवम्बर–दिसम्बर) 1992 में एज़ोला कैरोलिनियाना पर एक जलीय घोल प्रयोग किया गया, जिसमें फॉस्फोरस (0, 7, 14 पी. पी. एम.) तथा जस्ता (0, 0.05 एवं 0.10 पी. पी. एम.) को पोटैशियम डाइहाइड्रोजन फॉस्फेट और ज़िंक सल्फेट द्वारा प्लास्टिक के गमलों में 500 मिली फॉस्फोरस फॉस्फेट तथा नाइट्रोजन धातु कण मिश्रित घोल में दिया गया। नौ उपचारों

को नौ पुनरावृत्तियों में पूर्णतया यादृच्छिक अभिकल्पना के कारकीय परीक्षण के साथ किया गया। प्रत्येक गमले में 500 मिग्रा. ताजा एजोला का निवेशन किया गया। दिन-रात के तापमान सारणी 1 में दर्शाये गये हैं।

सारणी 1

एजोला कैरोलिनियाना की वृद्धि

वृद्धि चरण (दिन)	ताप (°से०)			
	दिन		रात	
	खरीफ	रबी	खरीफ	रबी
10	31.6	26.3	26.0	13.6
20	31.4	25.8	26.3	11.7
30	30.4	23.9	24.4	8.5

एज़ोला को कीट एवं रोगों से मुक्त रखने के लिए 10 दिन के अन्तराल पर कार्बोफ्यूरान (0.4%), बेनलेट (1%) घोल का दो बार छिड़काव किया गया। 10, 20 एवं 30 दिन पश्चात् तीन बार एज़ोला को एकत्र कर ताज़ा जैव भार ज्ञात किया गया। प्रत्येक उपचार से पाँच एज़ोलों को अलग-अलग कुचल कर पाँच शैवाल तन्तुओं के प्रति सेमी. में विद्यमान हेटरोसिस्टों की संख्या की गणना सूक्ष्मदर्शी द्वारा की गयी। ताज़ा एज़ोला में हरित तवक को रंगमापी विधि द्वारा ज्ञात किया गया। इकट्ठा किये गये एज़ोला का शुष्क भार ज्ञात करने के लिए इसे 70° से. पर ओवन में 36–40 घन्टा तक सुखाया गया। तत्पश्चात् उसका उपयोग सम्पूर्ण नाइट्रोजन तथा कार्बनिक कार्बन के निर्धारण के लिये किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

ताज़ा जैव भार

फॉस्फोरस एवं जस्ता के अकेले एवं संयुक्त प्रयोग से प्रत्येक वृद्धि चरण पर दोनों मौसम के ताज़ा जैव भार में सार्थक वृद्धि पायी गयी। खरीफ़ में एज़ोला का जैव भार अधिक पाया गया जहाँ पर दिन का तापमान 30.4—31.6° से. था (देखें सारणी 1)। सम्भवतः खरीफ़ में रबी की अपेक्षा अधिक ताप एज़ोला की वृद्धि में सहायक सिद्ध हुआ। पीटर तथा सहयोगी[3] ने भी 30 से. ताप को एज़ोला की वृद्धि के लिए उपयुक्त पाया। ताजा जैव भार में औसत वृद्धि 10 दिन पर अधिक पायी गयी जो समय के साथ घटती गया, लेकिन सम्पूर्ण जैव भार की मात्रा 30 दिन पर अधिक पाई गयी जो समय के साथ बढ़ती गयी। नियन्त्रण के सापेक्ष 0.1 पी. पी. एम. जस्ते के प्रयोग से अधिक जैव

भार प्राप्त हुआ, जिसका प्रभाव रबी में 20 दिन बाद 0.05 पी. पी. एम. जस्ते के प्रयोग से प्राप्त जैव भार से सार्थक रूप से अधिक रहा। जड़ के समीप फॉस्फोरस की उपयुक्त मात्रा एज़ोला के विस्तार में अधिक महत्वपूर्ण है। प्रस्तुत अध्ययन में फॉस्फोरस के प्रयोग से एज़ोला के जैव भार में 7-61% वृद्धि हुई किन्तु फॉस्फोरस की उच्च मात्रा (14 पी. पी. एम.) हानिकारक सिद्ध हुई क्योंकि जैव भार में 8-24% की कमी आई। यह कमी 7 पी. पी. एम. फॉस्फोरस से प्राप्त जैव भार के सापेक्ष सार्थक रही। एज़ोला के भार में यह कमी तत्व अवशोषण में अवरोध तथा उपापचय एवं वृद्धि में अवाञ्छनीय प्रभावों के फलस्वरूप हुई। सबसे अधिक जैव भार 7 पी. पी. एम. फॉस्फोरस एवं 0.05 पी. पी. एम. जस्ते से संयुक्त प्रयोग से पाया गया।

नाइट्रोजन की मात्रा

फॉस्फोरस एवं जस्ता के एकल एवं संयुक्त प्रयोग से एज़ोला में नाइट्रोजन की मात्रा पर सार्थक प्रभाव पाया गया जो समय के साथ दोनों मौसमों में घटता गया। नाइट्रोजन की मात्रा में यह कमी घोल के पोषक तत्वों की कमी के परिणामस्वरूप हेटरोसिस्ट की संख्या तथा उसकी क्रियाशीलता में कमी के कारण संभव है।[1] पूरे अध्ययनकाल तक तापमान खरीफ़ एवं रबी में क्रमशः 30.4-31.60 से. और 23.9-26.3 0 के बीच रहा। यद्यपि दिन का तापमान खरीफ़ में ज्यादा रहा लेकिन नाइट्रोजन की मात्रा रबी में ज़्यादा रही जो यह दर्शाती है कि एज़ोला कैरोलिनियाना में नाइट्रोजन की क्रिया के लिये रबी का ताप उपयुक्त है। रबी मौसम में रात्रि के कम ताप का नाइट्रोजन की मात्रा पर कोई असर नहीं हुआ। जस्ता की बढ़ती मात्रा के साथ एज़ोला में नाइट्रोजन की मात्रा अधिक पायी गयी। यातजावा तथा सहयोगियों ने[4] भी एज़ोला की वृद्धि एवं नाइट्रोजन क्रिया पर अच्छा प्रभाव प्राप्त किया। फॉस्फोरस की अधिकतम मात्रा को नाइट्रोजन के घटने में सार्थक रूप से प्रभावी पाया गया यहाँ तक कि उच्च फॉस्फोरस उपचार से नियन्त्रण की तुलना में कम नाइट्रोजन देखा गया। 7 पी. पी. एम. फॉस्फोरस तथा 0.05 पी. पी. एम. जस्ता के संयुक्त प्रयोग से अन्य संयुक्त उपचारों की तुलना में सार्थक रूप से अधिक नाइट्रोजन प्राप्त हुआ। इससे स्पष्ट है कि जिंक फॉस्फेट का घुलनशील उत्पाद फॉस्फोरस एवं जस्ता की क्रान्तिक सान्द्रता की माँगपूर्ति के लिए पर्याप्त रहा।

हेटरोसिस्ट की संख्या/सेमी.

मौसम परिवर्तन का हेटरोसिस्ट की संख्या पर कोई विशेष प्रभाव स्पष्ट नहीं हुआ जबकि बढ़ती अवधि के साथ हेटरोसिस्ट की संख्या/सेमी. घटती पायी गयी। वृद्धि के प्रारंभिक दिनों में 7 पी. पी. एम. फॉस्फोरस के प्रयोग से 14 पी. पी. एम. फॉस्फोरस की अपेक्षा सार्थक रूप से अधिक हेटरोसिस्ट पाया गया। यह एक महत्वपूर्ण उपलब्धि है कि नियन्त्रण में हेटरोसिस्ट की संख्या अधिक होने के बावजूद भी उसमें जिंक उपचारों की तुलना में नाइट्रोजन की मात्रा कम पायी गयी। इससे स्पष्ट है कि जस्ता परोक्ष या अपरोक्ष रूप से हेटरोसिस्ट के नाइट्रोजन को प्रभावित करता है। इस प्रकार का परिणाम एज़ोला पर याताजावा तथा उनके सहयोगियों[4] द्वारा भी पाया गया है।

सारणी 2

एजोला कैरोलिनियाना के ताजा जैव भार पर
फॉस्फोरस तथा जस्ते की विभिन्न मात्राओं का प्रभाव (मि०ग्रा०)

फॉस्फोरस ⇒ जस्ता⇓ (पी.पी.एम.)	खरीफ				रबी			
	0	7	14	औसत	0	7	14	औसत
10 दिन पश्चात्								
0	881	1257	1252	1130	726	912	774	804
0.05	1206	1192	1163	1187	793	914	839	849
0.1	1124	1378	950	1191	854	972	871	899
औसत	1110	1275	1122	–	792	933	928	–
20 दिन पश्चात्								
0	1073	1317	1301	1230	1161	1500	1439	1367
0.05	1400	1738	1445	1528	1291	1617	1483	1464
0.1	1728	2349	1462	1846	1468	2062	1829	1786
औसत	1401	1801	1403	–	1306	1726	1584	–
30 दिन पश्चात्								
0	1173	1922	1490	1528	2334	2814	2831	2630
0.05	1188	1880	2718	1877	2814	3037	2630	2827
0.1	1522	2562	2065	2102	2466	3382	2857	2902
औसत	1294	2401	1812	–	2538	3078	2772	–

	C.D. (P = 0.05)			C.D. (P = 0.05)		
	10 दिन	20 दिन	30 दिन	10 दिन	20 दिन	30 दिन
P	127	326	449	95	117	227
Zn	N. S.	326	449	95	117	227
P × Zn	218	566	780	163	205	395

सारणी 3

एजोला कैरोलिनियाना में नाइट्रोजन की मात्रा पर फॉस्फोरस तथा जस्ते की विभिन्न मात्राओं का प्रभाव (मि०ग्रा०)

फॉस्फोरस ⇒ जस्ता⇓ (पी.पी.एम.)	खरीफ				रबी			
	0	7	14	औसत	0	7	14	औसत
10 दिन पश्चात्								
0	28.58	29.64	25.17	27.80	29.57	29.20	27.19	28.65
0.05	29.20	28.51	23.85	27.19	30.11	28.99	26.78	28.63
0.1	29.31	32.99	24.42	28.91	29.32	31.76	27.24	29.42
	२६.०३	३०.३८	२४,४८	फ	२६.६७	२६.६८	२७.०७	फ
२० दिन पश्चात्								
0	18.36	19.78	19.08	11.08	20.31	19.27	18.85	19.48
0.05	19.98	18.91	16.65	18.51	18.84	19.58	19.43	19.28
0.1	19.61	23.67	17.60	20.29	20.20	23.24	19.96	20.83
औसत	19.32	20.79	17.78	–	19.78	20.73	19.08	–
30 दिन पश्चात्								
0	15.05	14.47	15.21	14.21	15.95	15.53	14.93	15.47
0.05	14.36	15.04	16.67	15.43	15.65	15.22	15.68	15.52
0.1	16.11	17.95	14.21	16.09	15.80	17.71	14.51	16.01
औसत	15.17	15.82	15.43	–	15.80	16.15	15.04	–

	C.D. (P = 0.05)			C.D. (P = 0.05)		
	10 दिन	20 दिन	30 दिन	10 दिन	20 दिन	30 दिन
P	0.72	0.76	0.42	0.75	1.07	0.79
Zn	0.72	0.76	0.42	0.75	1.07	N. S.
P × Zn	1.24	1.32	0.73	1.29	1.85	1.32

सारणी 4

एजोला कैरोलिनियाना में प्रति से०मी० हेटरोसिस्ट सेख्या पर
फॉस्फोरस तथा जस्ते की विभिन्न मात्राओं का प्रभाव (मि०ग्रा०)

फॉस्फोरस ⇒ जस्ता⇓ (पी.पी.एम.)	खरीफ				रबी			
	0	7	14	औसत	0	7	14	औसत
10 दिन पश्चात्								
0	5.07	5.54	4.03	4.88	4.90	5.58	4.06	4.85
0.05	4.78	5.73	3.55	4.69	4.61	5.06	3.97	4.56
0.1	5.72	5.13	4.28	5.04	5.33	5.01	4.12	4.89
औसत	5.19	5.47	3.95	–	5.01	5.22	4.05	–
20 दिन पश्चात्								
0	2.69	2.19	1.95	2.27	2.61	2.34	2.12	2.36
0.05	2.76	2.12	2.66	2.51	2.36	2.42	2.45	2.41
0.1	2.57	3.79	1.84	2.74	2.67	2.31	1.85	2.61
औसत	2.67	2.70	2.15	–	2.56	2.69	2.14	–
30 दिन पश्चात्								
0	1.62	1.45	1.78	1.62	1.72	1.51	1.60	1.61
0.05	1.39	1.19	2.25	1.61	1.52	1.27	1.92	1.57
0.1	1.81	2.74	1.65	2.07	1.83	2.31	1.61	1.92
औसत	1.60	1.79	1.90	–	1.69	1.69	1.71	–

	C.D. (P = 0.05)			C.D. (P = 0.05)		
	10 दिन	20 दिन	30 दिन	10 दिन	20 दिन	30 दिन
P	0.41	0.41	N. S.	0.31	0.25	N. S.
Zn	N. S.	0.41	0.39	0.31	0.25	0.32
P × Zn	0.71	0.71	0.68	0.54	0.45	0.56

सारणी 5

एजोला कैरोलिनियाना में हरित लवक की मात्रा (μg/g ताजा जैव भार) पर फॉस्फोरस तथा जस्ते की विभिन्न मात्राओं का प्रभाव (मि०ग्रा०)

फॉस्फोरस ⇒ जस्ता⇓ (पी.पी.एम.)	खरीफ				रबी			
	0	7	14	औसत	0	7	14	औसत
10 दिन पश्चात्								
0	305	326	338	323	572	452	397	473
0.05	319	335	356	337	417	421	484	441
0.1	368	340	256	321	469	394	337	400
औसत	332	337	312	–	486	422	406	–
20 दिन पश्चात्								
0	161	186	226	191	241	219	205	221
0.05	311	239	306	285	281	243	236	253
0.1	194	251	248	231	248	187	224	220
औसत	232	225	260	–	257	216	222	–
30 दिन पश्चात्								
0	174	232	158	188	149	91	105	115
0.05	199	140	167	169	121	128	99	113
0.1	175	160	143	159	152	83	94	110
औसत	185	177	156	–	137	101	100	–

	C.D. (P = 0.05)			C.D. (P = 0.05)		
	10 दिन	20 दिन	30 दिन	10 दिन	20 दिन	30 दिन
P	N. S.	N. S.	N. S.	37	32	16
Zn	N. S.	51	N. S.	37	32	N. S.
P × Zn	68	81	N. S.	64	55	27

सारणी 6

एजोला कैरोलिनियाना में हरित लवक की मात्रा (μg/gp ताजा जैव भार) पर फॉस्फोरस तथा जस्ते की विभिन्न मात्राओं का प्रभाव (मि०ग्रा०)

फॉस्फोरस ⇒ जस्ता⇓ (पी.पी.एम.)	खरीफ				रबी			
	0	7	14	औसत	0	7	14	औसत
10 दिन पश्चात्								
0	54	77	78	70	46	69	51	55
0.05	75	75	72	74	57	69	57	61
0.1	78	85	58	74	66	70	62	66
औसत	70	79	70	–	56	69	57	–
20 दिन पश्चात्								
0	66	84	80	77	84	105	99	96
0.05	85	120	87	97	89	113	101	101
0.1	104	147	88	113	102	146	129	126
औसत	85	117	85	–	92	121	–	–
30 दिन पश्चात्								
0	91	144	107	114	157	183	186	175
0.05	95	143	184	141	183	209	172	191
0.1	116	176	136	143	165	228	187	194
औसत	101	154	142	–	168	203	185	–

	C.D. (P = 0.05)			C.D. (P = 0.05)		
	10 दिन	20 दिन	30 दिन	10 दिन	20 दिन	30 दिन
P	N. S.	23.6	26.2	11.2	79.0	11.2
Zn	N. S.	23.6	26.2	95	79	11.2
P × Zn	19.3	42.4	45.4	19.3	13.7	10.3

सारणी 7

एजोला कैरोलिनियाना में प्रतिशत कार्बनिक कार्बन की मात्रा पर फॉस्फोरस तथा जस्ते की विभिन्न मात्राओं का प्रभाव (मि०ग्रा०)

फॉस्फोरस ⇒ जस्ता⇓ (पी.पी.एम.)	खरीफ				रबी			
	0	7	14	औसत	0	7	14	औसत
10 दिन पश्चात्								
0	38.12	37.25	32.84	36.27	36.25	36.76	35.29	36.43
0.05	35.29	34.98	35.29	35.13	35.78	35.29	34.80	35.29
0.1	38.72	35.45	35.27	36.27	36.76	33.82	35.78	35.45
औसत	37.58	35.45	34.64	–	36.60	35.29	35.29	–
20 दिन पश्चात्								
0	45.24	45.09	46.08	45.91	45.10	44.10	45.45	44.94
0.05	45.10	44.61	44.61	44.78	43.63	44.61	44.12	44.12
0.1	44.12	43.63	45.59	44.45	43.63	42.64	44.45	43.95
औसत	44.82	44.45	45.43	–	44.12	43.79	45.10	–
30 दिन पश्चात्								
0	50.90	48.53	51.96	40.49	49.02	49.51	50.66	49.73
0.05	51.96	50.49	49.02	51.45	51.45	50.00	49.02	50.16
0.1	50.49	51.47	50.98	50.98	49.02	48.04	50.00	49.02
औसत	50.16	50.16	50.65	–	49.83	49.18	49.89	–

	C.D. (P = 0.05)			C.D. (P = 0.05)		
	10 दिन	20 दिन	30 दिन	10 दिन	20 दिन	30 दिन
P	1.45	N. S.	N. S.	N. S.	1.30	N. S.
Zn	N. S.	N. S.	N. S.	N. S.	N. S.	N. S.
P × Zn	2.51	N. S.	N. S.	N. S.	N. S.	N. S.

हरित लवक की मात्रा

हरित लवक की मात्रा पर जस्ता तथा फॉस्फोरस का एकल प्रभाव सार्थक नहीं पाया गया परन्तु इनके संयुक्त प्रयोग का प्रभाव सार्थक अवश्य रहा। रबी में हरित लवक की मात्रा सार्थक रूप से बढ़ी। खरीफ में 0.05 पी. पी. एम. जस्ता तथा 7 पी. पी. एम. फॉस्फोरस के संयुक्त प्रयोग से इनकी उच्च मात्राओं की तुलना में 5-8% की बढ़ोत्तरी पायी गयी। दोनों ही मौसमों में 20 दिन एवं 30 दिन पर 0.05 पी. पी. एम. जस्ता की मात्रा हरित लवक की मात्रा को सार्थक रूप से बढ़ाती पायी गयी परन्तु फॉस्फोरस की सभी मात्राओं का प्रभाव सांख्यिकीय रूप से निरर्थक रहा। रबी में जस्ता एवं फॉस्फोरस का प्रयोग हरित लवक की मात्रा को बढ़ाने में सार्थक रहा। हरित लवक की मात्रा खरीफ के प्रारम्भिक दिनों में अधिक रही परन्तु समयान्तराल के साथ घटती गयी। इन तथ्यों से सिद्ध होता है कि हरित लवक की मात्रा फॉस्फोरस की बढ़ती हुए मात्रा के साथ घटती है। दोनों की मौसमों में हरित लवक की मात्रा में समय के साथ वृद्धि होती रही। उत्तरोत्तर कमी इस बात को अवश्य दर्शाती है कि हरित लवक की मात्रा वृद्धि माध्यम में तत्वों की कमी से सम्बन्ध रखती है[1]।

शुष्क जैव भार

खरीफ एवं रबी दोनों मौसमों के प्रत्येक चरण में जस्ते की 0.1 पी. पी. एम. मात्रा की तुलना में फॉस्फोरस की 7 पी. पी. एम. मात्रा का एकल एवं संयुक्त प्रयोग सार्थक रूप से शुष्क जैव भार को बढ़ाने में सहायक रहा। फॉस्फोरस की 14 पी. पी. एम. मात्रा पर शुष्क भार सार्थक रूप से घटता पाया गया। खरीफ में शुष्क भार की मात्रा 10 दिन पर अधिक पायी गयी।

खरीफ़ से अपेक्षाकृत रबी में 30 दिन पर जैव भार की मात्रा अधिक पायी गयी। चेन तथा ली[2] ने भी पाया है कि होगलैंड घोल में तत्वों का मिश्रण शुष्क भार को बढ़ाता है।

कार्बनिक कार्बन की मात्रा

कार्बनिक कार्बन की औसत मात्रा 0.1 पी. पी. एम. जस्ता के साथ खरीफ़ एवं रबी दोनों मौसमों में 10 दिन पर अधिक पाई गयी तथा जस्ता एवं फॉस्फोरस का संयुक्त प्रभाव, फॉस्फोरस की कम मात्रा एवं जस्ता की अधिक मात्रा पर अधिक देखा गया परन्तु इनकी इस तरह की वृद्धि सांख्यिकीय रूप से सार्थक नहीं रही। फॉस्फोरस की बढ़ती मात्रा कार्बनिक कार्बन की मात्रा को बढ़ाने में सहायक नहीं रही। खरीफ में 20 दिन पर 14 पी. पी. एम. फॉस्फोरस के एकल प्रयोग से कार्बनिक कार्बन की अधिक मात्रा पाई गयी जबकि रबी में जस्ते की 0.05 पी. पी. एम. मात्रा कार्बनिक कार्बन की मात्रा को बढ़ाने में सहायक रही। कार्बनिक कार्बन की मात्रा दोनों मौसमों में बढ़ती पायी गयी तथा खरीफ़ में यह मात्रा रबी की अपेक्षा अधिक रही क्योंकि तापमान का समुचित सहयोग कार्बन की मात्रा को बढ़ाने में सहायक रहा। साथ ही साथ, वानस्पतिक कोशिकाओं में उत्तरोत्तर वृद्धि के कारण कार्बनिक कार्बन की मात्रा में वृद्धि होती रही। इस अध्ययन से यह सिद्ध होता है कि फॉस्फोरस की कम मात्रा का प्रभाव एज़ोला की वृद्धि, नाइट्रोजन–स्थिरीकरण एवं हेटरोसिस्ट की संख्या पर लाभदायक है, परन्तु जस्ते की अधिक मात्रा के प्रयोग का अध्ययन किया जाना चाहिए।

निर्देश

1. एलोगेर, ए. ए. तथा फेलिजार्डो, जे. आर. : **फिलीपीन्स एग्रीकल्चरिस्ट.** 1987, 70 (1-2), 54-58.

2. चेन, जे. एम. तथा ली, एस. एल. : **एकआ पोडोल, सिन्फा**, 1980, (4), 370-374.

3. पीटर, जी. ए., रे, टी. वी., मेने, बी. सी. तथा तोया, आर. ई. : (1980) एज़ोला, एनाबिना एसोसिएसन माइक्रोलोजिकल एवं फिजियोलोजिकल अध्ययन, In : न्यूटन, डब्ल्यू, इ. और आर. भी. जोहान्सन, डब्लू. एच. (लेखक) माइग्रेज स्थिरीकरण मिडीसन, यार्क प्रेस, 2 : 293-309.

4. याताजावा, एम., तोमोमाटसू, एन. होसोडी, एन. तथा नुनोम, के. : **स्वायल साइन्स एवं प्लान्ट न्यूट्रिशनः** 1980, 26 (3), 415-426.

5. वेटेनेव, आई, बीरजा, एन. एन. तथा रोसारिया, डी. सी. : **स्वायल साइन्स एवं प्लान्ट न्यूट्रिशन,** 1980, 26 (3), 301-307.

6. सिंह, पी. के. : **नाइट्रोजन इन राइस,** आई. आर आइ., फिलीपीन्स, 1979, 407-418.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.1, January, 2000.

विचरणशील क्रम का द्विचर भिन्नात्मक समाकलन संकारक

पी० एल० सेठी तथा कु० वन्दना राजवानी

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जय नारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त – मार्च 3, 1999]

सारांश

द्विचरक्रम $\alpha(x), \beta(y)$ के भिन्नात्मक समाकलों $I_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} \phi$ पर विचार किया गया है। इन समाकलों के गुणों पर प्रमेयों को सिद्ध किया गया है। द्विचर क्रम $(d^2/dx\,dy)^n f(x\,y)$ के फलनों की व्याख्या तथा अवकलन का अध्ययन किया गया है। कुछ गुणों तथा प्रतिलोमन सूत्र भी प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

Bivariate fractional integration operator of variable order. *By* P. L. Sethi and Miss Vandana Rajwani, Department of Mathematics and Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur.

The fractional integrals $I_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} \phi$ of bivariate order $\alpha(x)$, $\beta(y)$ are considered. Theorems on the properties of $I_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)}$ are proved. Interpretation and differentiation of function to a bivariate order $(d^2/dx\,dy)^n f(x\,y)$ has been studied. Some properties and the inversion formula are also obtained.

प्रस्तावना

सामान्य फलन में संकेत $(d/dx)^n f(x)$, $n = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots$ से पूर्णांक क्रम के व्युत्पन्नों का द्योतन होता है। भिन्नात्मक फलन में $(d/dx)^{-\alpha} f(x)$ एवं $(d/dx)^{\alpha} f(x)$ Re $\alpha > 0$ संकेत क्रमशः समाकलन तथा अवकलन के द्योतक हैं। इन संकारकों को रीमान–लिओविले समाकल द्वारा परिभाषित किया जाता है।

इस प्रपत्र में हम एक द्विचर क्रम $(d^2/dx\,dy)^{\alpha(x),\beta(y)} f(x,y)$ के लिए फलनों के समाकलन तथा अवकलन का अध्ययन करेंगे जहाँ क्रम $\alpha(x)$ तथा $\beta(y)$ क्रमशः x तथा y के फलन हैं। हाल ही में सैंको तथा रास ने[2] एकचर दशा के लिए चर भिन्नात्मक क्रम के समाकलन तथा अवकलन की विवेचना की है। इससे प्रेरित होकर यह शोधकार्य सम्पन्न किया गया जिसके सम्प्रयोग आगे चलकर हो सकेंगे।

यादृच्छिक पूर्णांक क्रम n, $(d/dx)^n f(x)$ के अवकलन के मामले में विभिन्न बिन्दुओं x के लिए विभिन्न पूर्णांकों n का चुनाव असंतत चरण प्रकार के फलन $\phi n(x)$ को प्रदान करेगा। यदि हम निरन्तर परिवर्तनशील क्रम $\alpha(x), \beta(y)$ पर विचार करना चाहें तो $\alpha(x), \beta(y)$ के मान अ–समाकल मान होंगे। हमें द्विचर क्रम $\begin{matrix}\alpha(x):\\ \beta(y):\end{matrix}\left(\dfrac{d^2}{dx\,dy}\right)^{\alpha(x),\beta(y)} f(x,y)$ के प्रति अवकलन तथा समाकलन के प्राकृतिक संकेतन से काम लेना होगा।

इस विधि से रीमान–लियोविले परिभाषाओं के कुछ गुणों की हानि होने से यह अधिक स्वाभाविक है। उदाहरणार्थ रीमान–लियोविले भिन्नात्मक फलन $D^{-\mu} D^{-\nu} f(x) = D^{-\mu-\nu} f(x)$ में घातांक नियम हमारे द्वारा प्रस्तावित परिभाषा के लिए सत्य नहीं होगा। इस शोध में कैम्पे–द–फेरी हाइपरज्यामितीय फलन आये हैं।

प्रारम्भिक तथा गौण सूचना

(i) काम्प्टे द फेरी फलन

काम्प्टे द फेरी[1] ने सामान्य हाइपरज्यामितीय श्रेणी को दो चरों में निम्नांकित प्रकार से परिभाषित किया है–

$$F\,{}^{p:q\;;k}_{l:m;n}\left[\begin{matrix}(a_p): & (b_q:(c_k)\\ (\alpha_l): & (\beta_m):(\gamma_n)\end{matrix}\; x,\, y\right]$$

$$= \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{p}(a_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{q}(b_j)_r\prod_{j=1}^{k}(c_j)_s}{\prod_{j=1}^{l}(\alpha_j)_{r+s}\prod_{j=1}^{m}(\beta_j)_r\prod_{j=1}^{n}(\gamma_j)_s}\,\frac{x^r}{r!}\,\frac{y^s}{s!},$$

जो अपसरण की शर्त के अधीन है।

(i) $p+q<l+m+1, p+k<l+n+1, |x|<\infty, |y|<\infty,$

अथवा (ii) $p+q=l+m+1, \quad p+k=l+n+1$

तथा $|x|^{1/(p-1)} + |y|^{1/(p-1)} < 1$, यदि $p>l$

$\max\{|x|, |y|\} < 1$ यदि $p \le l$

(ii) हाइपरज्यामितीय फलन

$$2F_1(a, b; c; z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{z^n}{n!}, \quad c \ne 0, -1, -2$$

(i) नितान्त अभिसारी है यदि $\text{Re}\,(c-a-b) > 0$;

(ii) प्रतिबन्धित रूप से अभिसारी यदि $-1 < \text{Re}\,(c-a-b) \le 0, z \ne 1$;

(iii) अपसारी यदि $\text{Re}\,(c-a-b) \le -1$

द्विचर के लिए बहुविख्यात परिभाषा है–

$$I_{a^+, b^-}^{\alpha, \beta} f(x, y) = \frac{1}{\Gamma\alpha\,\Gamma\beta} \int_a^x \int_b^y (x-u)^{\alpha-1} (y-v)^{\beta-1} f(u, v)\, du\, dv$$

$$\text{Re}\,(\alpha) > 0 ; \text{Re}\,(\beta) > 0 \qquad (1)$$

यदि $a > -\infty$, $b > -\infty$ तो हमें रीमान परिभाषा प्राप्त होती है और $a = -\infty$, $b = -\infty$ होने पर लिओविले परिभाषा प्राप्त होती है। उपर्युक्त को उस दशा तक विस्तारित किया जाता है जहाँ α, β क्रमशः x, y के फलन हैं

$$I_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} f(x, y) = \frac{1}{\Gamma\alpha(x)\,\Gamma\beta(y)} \int_a^x \int_b^y \chi_1\, du\, dv$$

$$\text{Re}\,\alpha(x) > 0 ; \text{Re}\,\beta(y) > 0 \qquad (2)$$

जहाँ $\chi_1 = (x-u)^{\alpha(x)-1} (y-v)^{\beta(y)-1} f(u,v)$

यहाँ $f(x, y)$ कोई भी फलन हो सकता है जो $x \geq a$, $y \geq b$ के लिए परिभाषित है और $f(x, y)$ को इसलिए कल्पित किया जाता है कि वह समाकल

$$D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma[1-\alpha(x)\Gamma[1-\beta(y)]} \frac{d^2}{dx\,dy} \int_a^x \int_b^y \chi_2 \, du\, dv,$$

$$\operatorname{Re} \alpha(x) > 0 \; ; \; \operatorname{Re} \beta(y) > 0 \tag{3}$$

के अभिसरण को निश्चित कर दे जहाँ

$$\chi_2 = (x-u)^{-\alpha(x)} (y-v)^{-\beta(y)} f(u,v)$$

इस कल्पना के अन्तर्गत कि $0 < \operatorname{Re} \alpha(x) < 1$ तथा $0 < \operatorname{Re} \beta(y) < 1$

हम पाते हैं कि भिन्नात्मक संकारक (2) तथा (3) उस तरह से व्युत्क्रम नहीं हैं जिस तरह कि अचर क्रम में नीचे देखे जाते हैं इसलिए $D_{a^+, b^+}^{-\alpha(x), -\beta(y)}$ को $\left[D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} \right]^{-1}$ की तरह प्रचारित करना ठीक नहीं होगा। अचर क्रमों के लिए ज्ञात क्षमता फलन पर संमिति का भी अतिक्रमण होता है। वास्तव में क्षमता फलनों $(u-a)^l$, $(v-b)^n$ के लिए हमारे पास

$$I_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} \chi_3 = \chi_4 (x-a)^{\gamma+\alpha(x)} (y-b)^{\eta+\beta(y)} \tag{4}$$

हैं जहाँ

$$\chi_3 = [(u-a)^{\gamma} (v-b)^{\eta}] \, ;$$

$$\chi_4 = \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\eta+1)}{\Gamma[\gamma+\alpha(x)+1]\Gamma[\eta+\beta(y)+1]}$$

जो अचर क्रम की ही तरह प्रत्यक्ष परिगणनाओं के द्वारा है किन्तु फिर भी

$$D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} \chi_3 \neq \chi_5 (x-a)^{\gamma-\alpha(x)} (y-b)^{\eta-\beta(y)} \tag{5}$$

जहाँ

$$\chi_5 = \frac{\Gamma(\gamma+1)\Gamma(\eta+1)}{\Gamma[\gamma-\alpha(x)+1]\Gamma[\eta-\beta(y)+1]}$$

क्योंकि सीधी गणना से हमें

$$D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} \chi_3 = \chi_5 (x-a)^{\gamma-\alpha(x)} (y-b)^{\eta-\beta(y)} - \chi_6 \tag{6}$$

प्राप्त होता है जहाँ

$$\chi_6 = X_1 \left\{ X_2 + X_3 + X_4 \right\} X_5$$

जहाँ

$$X_1 = \frac{\Gamma(\gamma+1)\,\alpha'(x)\,\Gamma(\eta+1)\,\beta'(y)}{\gamma[\gamma-\alpha(x)+1]\,\Gamma[\eta-\beta(y)+1]};$$

$$X_2 = \ln(x-a)\ (y-b)$$

$$X_3 = \Psi\ [\gamma-\alpha(x)+2]\,[\eta-\beta(y)+2]\ ;$$

$$X_4 = \Psi\,[1-\alpha(x)]\,[1-\beta(y)]$$

$$X_5 = (x-a)^{\gamma+1-\alpha(x)}\ (y-b)^{\eta+1-\beta(y)}$$

जहाँ ψ साई फलन है।

मर्काउडे भिन्नात्मक व्युत्पन्न [देखें [2] अनुभाग 5 तथा 13] का अस्तित्व है–

$$\mathbf{D}_{a^+,\,b^+}^{\alpha(x),\,\beta(y)} = \chi_7 + \chi_8 \int_a^x \int_b^y \chi_9\, du dv\,,$$

$$0 < \operatorname{Re}\alpha < 1\,;\, 0 < \operatorname{Re}\beta < 1 \qquad (7)$$

जहाँ

$$\chi_7 = \frac{f(x\,,y)}{\Gamma(1-\alpha)\,(x-a)^{\alpha}\,\Gamma(1-\beta)\,(y-b)^{\beta}};$$

$$\chi_8\, [\,\frac{\alpha\,\beta}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)};$$

$$\chi_9 = \frac{f(x\,,y) - f(u\,,v)}{(x-u)^{1+\alpha}\,(y-v)^{1+\beta}}$$

जहाँ पहला पद विलुप्त हो जाता है यदि $\alpha = -\infty\,, \beta = -\infty$। इसे चर क्रम $\alpha(x)\,, \beta(y)$ दशा तक बढ़ाया जा सकता है।

$$\mathbf{D}_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} f = \chi_{10} + \chi_{11} \int_a^x \int_b^y \chi_{12} \, \mathrm{dudv}, \; 0 < \mathrm{Re}\, \alpha(x) < 1 \,; 0 < \mathrm{R}\, \beta(y) < 1 \tag{8}$$

जहाँ

$$\chi_{10} = \frac{f(x, y)}{\Gamma[1 - \alpha(x)](x-a)^{\alpha(x)} \, \Gamma[1 - \beta(y)](y-b)^{\beta(y)}};$$

$$\chi_{11} = \frac{\alpha(x)\beta(y)}{\Gamma[1 - \alpha(x)]\Gamma[1 - \beta(y)]};$$

$$\chi_{12} = \frac{f(x, y) - f(u, v)}{(x-u)^{1+\alpha(x)} \, (y-v)^{1+\beta(y)}}$$

निम्नांकित परिणाम प्रदर्शित करता है कि परिभाषा (8) क्रम के कम घात फलनों के लिए ((9) की तुलना (6) से करें) परिभाषा (3) से अधिक उपयुक्त है।

प्रमेयिका 2.1 माना $0 < \mathrm{Re}\, \alpha(x) < 1$, $0 < \mathrm{Re}\, \beta(y) < 1$ तथा $\gamma > -1$, $\eta > -1$.

तब

$$D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} \chi_3 = \chi_5 (x-a)^{\gamma - \alpha(x)} (y-b)^{\eta - \beta(y)} \tag{9}$$

उपपत्ति : परिभाषा (8) के अनुसार

$$D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} \chi_3 = \chi_{13} + \chi_{11} \int_a^x \int_b^y \chi_{14} \, dudv \tag{10a}$$

जहाँ

$$\chi_{13} = \frac{(x-a)^{\gamma - \alpha(x)} \, (y-b)^{\eta - \beta(y)}}{\Gamma[1 - \alpha(x)]\Gamma[1 - \beta(y)]};$$

$$\chi_{14} = \frac{(x-a)^{\gamma}(y-b)^{\eta} - \chi_3}{(x-u)^{1+\alpha(x)} \, (y-v)^{1+\beta(y)}}$$

चरों $u = s + s(x-a)$; $v = q + q(y-b)$ के परिवर्तन से (10b) प्राप्त होता है–

$$D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} \chi_3 = \chi_{13} + \chi_{11} \, (x-a)^{\gamma - \alpha(x)} (y-b)^{\eta - \beta(y)} \int_0^1 \int_0^1 \chi_{15} \, ds \, dq \tag{10b}$$

जहाँ

$$\chi_{15} = \frac{(1-s^{\gamma})(1-q^{\eta})}{(1-s)^{1+\alpha(x)}\ (1-q)^{1+\beta(y)}}$$

ऊपर दाहिनी ओर के अन्तिम समाकल का मान अंशतः समाकलन द्वारा आसानी से प्राप्त किया जाता है।

इस तरह (10b) से (9) में पहुँच सकते हैं।

प्रमेयिका (2.1) प्रदर्शित करती है कि

$$\mathbf{D}_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} f \neq D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)}$$

जो अचर क्रम α, β की दशा के विपरीत है। अगले परिणाम से (3) तथा (8) दोनों परिभाषाओं के बीच का अन्तर पता चलता है।

प्रमेयिका 2.2 : माना $0 < \alpha(x) < 1, 0 < \beta(y)$. भिन्नात्मक व्युत्पन्न (3) तथा (8) से सम्बन्ध

$$D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} f(x, y) = \mathbf{D}_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} f(x, y) + \chi_{16} \int_a^x \int_b^y \chi_{17}\, du\, dy \qquad (11)$$

की तुष्टि होती है जहाँ

$$\chi_{16} = \frac{\alpha'(x)\, \beta'(y)}{\Gamma[1-\alpha(x)]\ \Gamma[1-\beta(y)]},$$

$$\chi_{17} = \frac{f(u, v)\, In\,(x-u)\,(y-v)}{(x-u)^{\alpha(x)}\ (x-v)^{\beta(y)}}$$

उपपत्ति : हम अति उत्तम फलन $f(x, y)$ पर विचार करते हैं और (3) से हमें मिलता है कि

$$D_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)}(x, y) = \frac{1}{\Gamma[1-\alpha(x)]\,\Gamma[1-\beta(y)]} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \frac{d^2}{dx\, dy} \int_a^{x-\varepsilon_1} \int_b^{y-\varepsilon_2} \frac{f(u, v)\, du\, dv}{(x-u)^{\alpha(x)}\ (v-v)^{\beta(y)}}\, du\, fv$$

(12)

संक्षिप्तता की दृष्टि से हमने अवकलन के विनिमय तथा सीमा तक पहुँचने की सम्भावना को सिद्ध नहीं किया। इसकी उत्पत्ति सन्दर्भ[4] की ही तरह प्राप्त की जा सकती है। (12) में समाकल संकेत के अन्तर्गत अवकलित करने पर–

$$D_{a^+,b^+}^{\alpha(x),\beta(y)} f(x,y) = \frac{1}{\Gamma[1-\alpha(x)]\,\Gamma[1-\beta(y)]} \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\chi_{18} - \alpha(x)\beta(y) \int_a^{x-\varepsilon_1} \int_b^{y-\varepsilon_2} \chi_{19}\, du\, fv\right] + \chi_{16} \int_a^x \int_b^y \chi_{17}\, du\, dv$$

जहाँ

$$\chi_{18} = \frac{f(x-\varepsilon_1,\ y-\varepsilon_2)}{\varepsilon_1^{\alpha(x)}\ \varepsilon_2^{\beta(y)}};$$

$$\chi_{19} = \frac{f(u,v)}{(x-u)^{1+\alpha(x)}\ (y-v)^{1+\beta(y)}}$$

ऊपर के प्रथम समाकल में $f(u, v)$ को $[f(u, v) - f(x, y)] + f(x, y)$ के रूप में प्रदर्शित करते हुए सरल परिगणन के बाद हम पाते हैं कि

$$D_{a^+,b^+}^{\alpha(x),\beta(y)} f = \chi_{16} \int_a^x \int_b^y \chi_{17}\, du\, dv + \chi_{10} + \lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \chi_{20} + \chi_{11} \int_a^x \int_b^y \chi_{21}\, du\, dv$$

जहाँ

$$\chi_{20} = \frac{f[(x-\varepsilon_1,\ y-\varepsilon_2)] - f(x,y)}{\varepsilon_1^{\alpha(x)}\ \varepsilon_2^{\beta(y)}},$$

$$\chi_{21} = \frac{f(u,v)}{(x-u)^{\alpha(x)}\ (y-v)^{\beta(y)}}$$

चूँकि $\alpha(x) < 1, \beta(y) < 1$, इसलिए ऊपर दी गई सीमा शून्य है और हमें (11) मिलता है।

उपप्रमेय 2.3 सम्बन्ध

$$\boldsymbol{D}_{a^+,b^+}^{\alpha(x),\beta(y)} f \equiv D_{a^+,b^+}^{\alpha(x),\beta(y)} f$$

तभी सत्य उतरता है जब $\alpha(x)$, $\beta(y)$ एक अचर हो या यदि $f(x, y)$ समरूप से शून्य हो।

जबकि भिन्नात्मक समाकलन तथा अवकलन एक दूसरे के व्यक्रम हैं

$$D^{\alpha,\beta}_{a^+,b^+} f\, I^{\alpha,\beta}_{a^+,b^+} \quad \varphi(x, y) = \varphi(x, y) \tag{13}$$

ऐसा $\alpha(x)$, $\beta(y)$ के चर क्रम में नहीं होता जैसा कि नीचे देखा जावेगा। (2) तथा (3) या (12) तथा (18) के लिए व्युत्पन्न सम्बन्ध (13) की अवैधता घातांक नियम के उल्लघंन से सम्बद्ध है। जैसा कि नीचे सामान्यतः देखा जावेगा

$$I^{\alpha(x),\beta(y)}_{a^+,b^+} I^{\lambda(x),\mu(y)}_{a^+,b^+} \;\varphi \neq I^{\alpha(x),\lambda(x),\beta(y),\mu(y)}_{a^+,b^+} \;\varphi \tag{14}$$

निम्नलिखित प्रश्न उठते हैं–

(1) किन दशाओं में घातांक नियम तुष्ट होगा ?

(2) अचरेतर क्रमों के कौन उदाहरण हैं जो (14) की पुष्टि करते हैं ?

(3) $\alpha(x)$, $\beta(y)$ के क्रमों के कौन उदाहरण हैं जो व्युत्क्रम को सम्बन्ध

$$D^{\alpha(x),\beta(y)}_{a^+,b^+} \quad I^{\alpha(x),\beta(y)}_{a^+,b^+} f \equiv f \tag{15}$$

के उल्लंघन की पुष्टि करते हैं ?

(4) दिये हुए चर क्रम $\alpha(x)$, $\beta(y)$ के लिए $I^{\alpha(x),\beta(y)}_{a,b}$ का व्युत्क्रम संकारक क्या है और इस तरह के संकारक को किस तरह निर्मित किया जा सकता है। अब हम इन प्रश्नों पर विचार करते हैं–

2.2 घातांक का नियम : प्रश्न 1.

निम्नांकित प्रमेय सत्य है।

प्रमेय 2.4 माना $\varphi(x, y)$ एक समाकलनीय फलन है। घातांक नियम

$$I^{\alpha(x),\beta(y)}_{a^+,b^+} I^{\lambda(x),\mu(y)}_{a^+,b^+} \;\varphi = I^{\alpha(x),\beta(y)+\lambda(x)\mu(y)}_{a^+,b^+} \tag{16}$$

अचर फलन $\lambda(x) = \lambda$, $\mu(y) = \mu$, Re $\lambda > o$, Re $\mu > 0$ तथा कोई फलन $\alpha(x)$, $\beta(y)$ जो Re $\alpha(x) > 0$ एवं Re $\beta(y) > 0$ को तुष्ट करे के लिए तुष्ट होता है।

इसकी उपपत्ति अचर क्रमों जैसी है।

टिप्पणी 2.5 सामान्य दशा जब $\lambda(x)$, $\mu(y)$ अचर नहीं होता निम्नलिखित निरूपण प्रदान करती है

$$I_{a^+, b^+}^{\alpha(x), \beta(y)} I_{a^+, b^+}^{\lambda(x), \mu(y)} \varphi = \int_a^x \int_b^y k_1(x, u)\, k_2(y, v)\, \varphi(u, v)\, du\, dv \qquad (17)$$

जिसकी अष्टि है

$$k_1(x, u) = \frac{1}{\Gamma[\alpha(x)]} \int_u^x \frac{(x-s)^{\alpha(x)-1} (s-u)^{\lambda(s)-1}}{\Gamma[\lambda(s)]} ds \qquad (18a)$$

$$= \frac{(x-u)^{\alpha(x)}}{\Gamma[\alpha(x)]} \int_0^1 \frac{(x-u)^{\lambda[u+(x-u)\xi]-1}\, \xi^{\lambda[u-(x-u)\xi]-1}\, (1-\xi)^{\alpha(x)-1}}{\Gamma\lambda[u+(x-u)\xi]} d$$

$$k_2(y, v) = \frac{1}{\Gamma[\beta(y)]} \int_v^y \frac{(y-q)^{\beta(y)-1} (q-v)^{\mu(q)-1}}{\Gamma[\beta(q)]} dq \qquad (18b)$$

$$= \frac{(y-v)^{\beta(y)}}{\Gamma[\beta(y)]} \int_0^1 \frac{(y-v)^{\mu[v+(y-v)\chi]-1}\, \chi^{\mu[v-(y-v)\chi]-1}}{\Gamma[\mu[v+(y-v)\chi]} (1-X)^{\beta(y)-1} d\chi$$

अचरेतर फलन $\lambda(u), \mu(v)$ के विभिन्न प्रकारों के लिए उपर्युक्त समाकल का स्पष्ट परिगणन संशयग्रस्त है।

2.3 घातांक नियम के उल्लंघन का उदाहरण : प्रश्न 2

(14) के प्रदर्शित करने के लिए सरलता हेतु हम $a = -\infty$, $b = -\infty$ लेते हैं और संकेतन

$$I_{+}^{\alpha, \beta} \varphi = \frac{1}{\Gamma\alpha\Gamma\beta} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \frac{\varphi(u, v)}{(x-u)^{1-\alpha} (y-v)^{1-\beta}} du\, dv \qquad (18')$$

का प्रयोग निर्देश[2] का अनुसरण करते हुए करते हैं। प्रमेय 2.4 से हमें एक अचरेतर फलन $\lambda(x)$, $\mu(y)$ चुनना चाहिए। हम सरलतम दशा को लेते हैं जो कि पाद फलन (Step function) है।

$$\lambda(x) = \begin{cases} \lambda_1, & x < 0 \\ \lambda_2, & x > 0 \end{cases} \text{ तथा } \mu(y) = \begin{cases} \mu_1, & y < 0 \\ \mu_2, & y > 0 \end{cases} \qquad (19)$$

तथा सरलता के लिए $\alpha(x) = \alpha =$ अचर $\beta(y) = \beta =$ अचर लेते हैं। निम्नांकित प्रमेय वैध है।

प्रमेय 2.6 माना $\alpha(x) = \alpha =$ अचर तथा $\beta(y) = \beta =$ अचर, $\operatorname{Re}\alpha > 0$; $\operatorname{Re}\beta > 0$ तथा माना कि $\lambda(x)$, $\mu(y)$ फलन (19) है जिसमें $\operatorname{Re}\lambda_k > 0$, $\operatorname{Re}\mu_{k'}' > 0$ जहाँ $k = 1, 2$; $k' = 0, 2$ तब

$$I_{+}^{\alpha,\beta}\, I_{+}^{\lambda(x),\mu(y)}\, \varphi = I_{+}^{\alpha+\lambda(x)}\, I_{+}^{\beta+\mu(y)}\, \varphi + \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})\, \varphi(u,v)\, du dv \tag{20}$$

जहाँ $A(x,u) \equiv 0$ $x < 0$ के लिए तथा $B(y,v) \equiv 0$ $y < 0$ के लिए, किन्तु $x > 0, y > 0$ के लिए

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha}\left[\frac{(-u)^{\lambda_1}}{\Gamma(1+\lambda_1)} F(-) - \frac{(-u)^{\lambda_2}}{\Gamma(1+\lambda_2)} F(=)\right] \tag{21a}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v}) = \frac{y^{\beta-1}}{\Gamma\beta}\left[\frac{(-v)^{\mu_1}}{\Gamma(1+\mu_1)} F(+) - \frac{(-v)^{\mu_2}}{\Gamma(1+\mu_2)} F(\pm)\right] \tag{21b}$$

जहाँ

$$F(-) = F(1, 1-\alpha : 1+\lambda_1 : u/x);$$

$$F(=) = F\left(1,\ 1-\alpha;\ 1+\ \lambda_2 : \frac{u}{x}\right)$$

$$F(+) = F(1, 1-\beta ; 1+\mu_1 ; u/y);$$

$$F(\pm) = F\left(1,\ 1-\beta:\ 1+\ \mu_2 : \frac{v}{y}\right)$$

जहाँ $F(a, b ; c ; z)$ गास हाइपरज्यामितीय फलन है।

उपपत्ति : (17) तथा (18a) और (18b) से

$$I_{+}^{\alpha,\beta}\, I_{+}^{\lambda(x),\mu(y)}\, \varphi = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \boldsymbol{k_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\, \boldsymbol{k_2}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})\, \varphi(u,v)\, du dv \tag{22}$$

जहाँ

$$k_1(x,u) = \frac{1}{\Gamma\alpha}\int_{u}^{x} \frac{(x-s)^{\alpha-1}\,(s-u)^{\lambda(s)-1}}{\Gamma\lambda(s)}\, ds$$

$$k_2(y, v) = \frac{1}{\Gamma\beta} \int_v^y \frac{(y-q)^{\beta-1} (q-v)^{\mu(q)-1}}{\Gamma\mu(q)} dq$$

यदि $x<0$; $y<0$ तो $s<0$; $q<0$ तथा $\lambda(s) = \lambda_1$; $\mu(q) = \mu_1$

अतः हमें आसनी से प्राप्त होते हैं

$$\left.\begin{array}{ll} k_1(x, u) = \Sigma_1, & x < 0 \\ k_2(y, v) = \Sigma_2, & v < 0 \end{array}\right] \qquad (23)$$

जहाँ

$$\Sigma_1 = \frac{(x-u)^{\alpha+\lambda_1-1}}{\Gamma(\alpha+\lambda_1)};$$

$$\Sigma_2 = \frac{(y-v)^{\beta+\mu_1-1}}{\Gamma(\beta+\mu_1)}$$

यदि $u>0$, $v>0$ तो उसी तरह से

$$\left.\begin{array}{ll} k_1(x, u) = \Sigma_3, & u > 0 \\ k_2(y, v) = \Sigma_4, & v > 0 \end{array}\right] \qquad (24)$$

जहाँ

$$\Sigma_3 = \frac{(x-u)^{\alpha+\lambda_2-1}}{\Gamma(\alpha+\lambda_2)};$$

$$\Sigma_4 = \frac{(y-v)^{\beta+\mu_2-1}}{\Gamma(\beta+\mu_2)}$$

शेष दशा में $u < 0; v < 0 < y$ हमें प्राप्त है–

$$k_1(x, u) = \frac{1}{\Gamma\alpha} \int_u^0 \frac{(x-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\lambda_1-1}}{\Gamma\lambda_1} ds + \frac{1}{\Gamma\alpha} \int_0^x \frac{(x-s)^{\alpha-1} (s-u)^{\lambda_2-1}}{\Gamma\lambda_2} ds$$

$$k_2(y, v) = \frac{1}{\Gamma\beta} \int_v^0 \frac{(y-q)^{\beta-1} (q-v)^{\mu_1-1}}{\Gamma\mu_1} dq + \frac{1}{\Gamma\beta} \int_0^y \frac{(x-q)^{\beta-1} (q-v)^{\mu_2-1}}{\Gamma\mu_2} dq$$

प्रथम समाकल में $s = u z_1$, $q = v z_2$ चरों तथा द्वितीय समाकल में $s = x z_1$, $q = y z_2$ चरों के परिवर्तन से निम्नांकित प्राप्त होता है

$$\left.\begin{aligned} k_1(x,u) &= \frac{(-u)^{\lambda_1} x^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha\,\Gamma((\lambda_1)} \int_0^1 (1-z_1)^{\lambda_1-1}\left(1-\frac{u}{x}z_1\right)^{\alpha-1} dz_1 \\ &\quad + \frac{(-u)^{\lambda_2-1} x^{\alpha}}{\Gamma\alpha\,\Gamma(\lambda_2} \int_0^1 (1-z_1)^{\alpha-1}\left(1-\frac{x}{u}z_1\right)^{\lambda_2-1} dz_1 \\ k_2(y,v) &= \frac{(-v)^{\mu_1} y^{\beta-1}}{\Gamma\beta\,\Gamma((\mu_1)} \int_0^1 (1-z_2)^{\mu_1-1}\left(1-\frac{v}{y}z_2\right)^{\beta-1} dz_2 \\ &\quad + \frac{(-v)^{\mu_2-1} y^{\beta}}{\Gamma\beta\,\Gamma(\mu_2)} \int_0^1 (1-z_2)^{\beta-1}\left(1-\frac{y}{v}z_2\right)^{\mu_2-1} dz_2 \end{aligned}\right] \tag{26}$$

गास हाइपरज्यामितीय फलन

$$F(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\,\Gamma(c-b)} \int_0^1 y^{b-1}(1-y)^{c-b-1}(1-zy)^{-a}\,dy \tag{26}$$

के सुविदित समाकल निरूपण को सम्प्रयुक्त करते हुए

देखें [[3], p. 114] हम (25) को

$$\left.\begin{aligned} k_1(x,u) &= \frac{(-u)^{\lambda_1} x^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha\,\Gamma(1+\lambda_1)} F(-) + \frac{(-u)^{\lambda_2-1} x^{\alpha}}{\Gamma\alpha\,\Gamma(\lambda_2)} F(*), \quad u > 0 < x \\ k_2(y,v) &= \frac{(-v)^{\mu_1} y^{\beta-1}}{\Gamma\beta\,\Gamma(1+\mu_1)} F(+) + \frac{(-v)^{\mu_2-1} y^{\beta}}{\Gamma\beta\,\Gamma(\mu_2)} F(\substack{**}), \quad v > 0 < y \end{aligned}\right] \tag{27}$$

में समानीत करते हैं जहाँ

$$F(*) = F\left(1; 1-\lambda_2; 1+\alpha; \frac{x}{u}\right),$$

$$F(\substack{**}) = F\left(1; 1-\mu_2, 1+\beta; \frac{y}{v}\right),$$

(23), (24) तथा (27) सूत्रों को एकत्र करते हुए हमें x तथा u के समस्त मानों $u < x$ एवं y एवं v, $v < y$ के लिए $k_1(x,u)$ तथा $k_2(y,v)$ अष्टियों प्राप्त होती हैं। यह सुविधाजनक होगा कि हीवीसाइड पाद फलनों को चालू किया जाय

$$\left.\begin{array}{l}\theta_{1+}(x)=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x<0\end{cases} \quad \text{तथा} \quad \theta_{1-}(x)=\begin{cases}1, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}\\[2ex] \theta_{2+}(y)=\begin{cases}1, & y>0\\ 0, & y<0\end{cases} \quad \text{तथा} \quad \theta_{2-}(y)=\begin{cases}1, & y<0\\ 0, & y>0\end{cases}\end{array}\right] \tag{28}$$

तो (23), (24) तथा (27) से

$$\boldsymbol{k_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\theta_{1-}(x)\,\Sigma_1+\theta_{1+}(x)\left\{\theta_{1+}(u)\Sigma_3+\theta_{1-}(u)\left[Z_1F(-)+Z_2F(*)\right]\right\} \quad \text{(I)}$$

$$\boldsymbol{k_2}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})=\theta_{2-}(v)\,\Sigma_2+\theta_{2+}(v)\left\{\theta_{2+}(v)\Sigma_4+\theta_{2-}(v)\left[Z_3F(+)+Z_4F\begin{pmatrix}*\\ *\end{pmatrix}\right]\right\} \quad \text{(II)}$$

जहाँ

$$Z_1=\frac{(-u)^{\lambda_1}x^{\alpha-1}}{\Gamma\alpha\,\Gamma(1+\lambda_1)}\,; \qquad Z_2=\frac{(-u)^{\lambda_2-1}x^{\alpha}}{\Gamma\alpha\,\Gamma(\lambda_2)}$$

$$Z_3=\frac{(-v)^{\mu_1}y^{\beta-1}}{\Gamma\beta\,\Gamma(1+\mu_1)}\,; \qquad Z_4=\frac{(-v)^{\mu_2-1}y^{\beta}}{\Gamma\beta\,\Gamma(\mu_2)}$$

चूँकि $\theta_{1+}(u)=1-\theta_{1-}(u)$ तथा $\theta_{2+}(v)=1-\theta_{2-}(v)$ अतः हम उपर्युक्त को यानी (I) तथा (II) को इस प्रकार लिख सकते हैं–

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{k_1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=\theta_{1-}(x)\,\Sigma_1+\theta_{1+}(x)\,\Sigma_3+\theta_{1+}(x)\,\theta_{1-}(u)\,\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\\[1ex] k_2(y,\boldsymbol{v})=\theta_{2-}(y)\,\Sigma_2+\theta_{2+}(v)\,\Sigma_4+\theta_{2+}(v)\,\theta_{2-}(v)\,\boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})\end{array}\right] \tag{29}$$

जहाँ

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})=Z_1F(-)+Z_5F(*)-\dfrac{(x-u)^{\alpha+\lambda_2-1}}{\Gamma(\alpha+\lambda_2)}\\[2ex] \boldsymbol{B}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{v})=Z_3F(+)+Z_6\begin{pmatrix}*\\ *\end{pmatrix}-\dfrac{(y-v)^{\beta+\mu_2-1}}{\Gamma(\beta+\mu_2)}\end{array}\right] \tag{30}$$

जहाँ

$$Z_5=\frac{(-u)^{\lambda_2-1}\,x^{\alpha}}{\Gamma(\lambda_2)\,\Gamma(1+\alpha)}\,; \qquad Z_6=\frac{(-v)^{\mu_2-1}\,y^{\beta}}{\Gamma(\mu_2)\,\Gamma(1+\beta)}$$

(22) में (29) को प्रतिस्थापित करने पर हमें (20) की प्राप्ति होती है क्योंकि

$$\theta_{1-}(x)\int_{-\infty}^{x}\Sigma_1\,\varphi(u)\,du+\theta_{1+}(x)\int_{-\infty}^{x}\Sigma_3\,\varphi(u)\,du=I_{+}^{\alpha+\lambda(x)}\,\varphi$$

$$\theta_{2-}(y)\int_{-\infty}^{y}\Sigma_2\,\varphi(v)\,dv+\theta_{2+}(y)\int_{-\infty}^{y}\Sigma_4\,\varphi(v)\,dv=I_{+}^{\beta+\mu(y)}\,\varphi$$

यह दिखाना शेष रहता है कि (30) में दिये $A(x, u)$ तथा $B(y, v)$ वैसा ही है जैसा कि (29) में है। इसे हाइपरज्यामितीय फलन के लिए वैश्लेषिक संतत सूत्र की सहायता से प्राप्त किया जा सकता है।

$$F(a, b; c; z)=B_1(-z)^{-a}F(a, 1-c+a; 1-b+a; z^{-1})$$
$$+B_2(-z)^{-b}F(b, 1-c+b; 1-a+b; z^{-1}) \qquad (31)$$

जहाँ

$$B_1=\frac{\Gamma(c)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} \qquad \text{तथा} \qquad B_2=\frac{\Gamma(c)\Gamma(a-b)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)}$$

[देखें [3] p 108] इस सूत्र को (30) में द्वितीय पद के लिए प्रयुक्त करने पर एक सरल परिगणना के बाद हमें (21) मिलता है।

उपप्रमेय 2.7 माना $\mathrm{Re}\,\alpha>0, \mathrm{Re}\,\beta>0$ तथा माना $\lambda(x)$, $\mu(y)$ पाद (Step) फलन (19) है जिसमें $\lambda_1\neq\lambda_2$ तथा $\mu_1\neq\mu_2$ तब

$$I_{+}^{\alpha,\beta}I_{+}^{\lambda(x),\mu(y)}\,\varphi\neq I_{+}^{\alpha+\lambda(x)}\,I_{+}^{\beta+\mu(y)}$$

दशा $\varphi(x)\equiv 0$ एवं $\varphi(y)\equiv 0$ इसके अपवाद हैं।

2.4 प्रतिलोभन सूत्र के उल्लंघन का उदाहरण प्रश्न 3. हम पाद फलन के उसी उदाहरण का प्रयोग करते हैं।

$$\alpha(x)=\begin{Bmatrix}\alpha_1, & x<0\\ \alpha_2, & x>0\end{Bmatrix} \quad \text{तथा} \quad \beta(y)=\begin{Bmatrix}\beta_1, & y<0\\ \beta_2, & y>0\end{Bmatrix} \qquad (32)$$

जिसमें $0<\mathrm{Re}\,\alpha_k<1$ $0<\mathrm{Re}\,\beta_k<1$, $k=1, 2$ पुनः सरलता हेतु $a=-\infty, b=-\infty$ लेते हैं। निम्नांकित प्रमेय सत्य है जिसमें $D_{+}^{\alpha(x)}$, $D_{+}^{\beta(y)}$ लिओविले प्रकार का भिन्नात्मक अवकलन (3) है जिसमें $a=-\infty$, $b=-\infty$।

प्रमेय 2.8 माना $\alpha(x)$, $\beta(y)$ पाद फलन (32) है $0<\mathrm{Re}\,\alpha_k<1$; $0<\mathrm{Re}\,\beta_k<1$ $k=1, 2$ तथा माना $\varphi(x), \varphi(y)\,\varepsilon\,L'(R')$ तब

$$D_{+}^{\alpha(x)\beta(y)}\ I_{+}^{\alpha(x)\beta(y)}\ \varphi = \varphi(x,y) + \Sigma_5\,\theta_+(x)\,\theta_+(y)\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\Sigma_6\,du\,dv$$

$$+\ \Sigma_7\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}|u|^{\alpha_1}\,|v|^{\beta_1}\,F_{0:2:1}^{0:2::1}\,(++)\ \varphi(u,v)\,du\,dv \qquad (33)$$

जहाँ

$$\Sigma_5 = \frac{\sin\alpha_2\pi\sin\beta_2\pi}{\pi^2}\ ; \qquad \Sigma_6 = \left(\frac{|u|}{x}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{|v|}{y}\right)^{\beta_2}\frac{\varphi(u,v)}{(x-u)(y-v)}$$

$$\Sigma_7 = \frac{\theta_+(x)\,\theta_+(y)\,x^{-1-\alpha_2}\,y^{-1-\beta_2}}{\Gamma(1+\alpha_1)\,\Gamma(1-\alpha_2)\,(\Gamma(1+\beta_1)\,\Gamma(-\beta_2)}$$

$$F(++) = F_{0:2:1}^{0:2:1}\left[\begin{matrix}1, & 1+\alpha_2 & ; & 1+\beta_2 & ; & \frac{u}{x}, \frac{v}{y}\\ & 1+\alpha & ; & 1+\beta_1 & & \end{matrix}\right]$$

जहाँ $\theta_+(x)\,\theta_+(y)$ हीवीसाइड फलन (28) है।

उत्पत्ति : फलन (28) का प्रयोग करते हुए हम $I_{+}^{\alpha(x)\beta(y)}$ एवं $D_{+}^{\alpha(x)\beta(y)}$ को

$$I_{+}^{\alpha(x)\beta(y)}\ \varphi = \theta_(x)\,\theta_(y)\,I_{+}^{\alpha_1,\beta_1}\varphi + \theta_+(x,y)\,I_{+}^{\alpha_2,\beta_{21}}\varphi$$

तथा

$$D_{+}^{\alpha(x)\beta(y)}f = \theta_(x)\,\theta_(y)\,D_{+}^{\alpha_1\beta_1}f + \theta_+(x)\,D_{+}^{\alpha_2\beta_1}f$$

के रूप में फिर से लिखते हैं। तब

$$D_{+}^{\alpha(x)\beta(y)}\ I_{+}^{\lambda(x)\mu(y)}\varphi = \theta_\,D_{+}^{\alpha_1,\beta_1}\,\theta\,I_{+}^{\alpha_1,\beta_1}\varphi + \theta_+\,D_{+}^{\alpha_2,\beta_2}\,\theta_+ + I^{\alpha_2,\beta_2}$$
$$+\ \theta_\,D^{\alpha_1,\beta_1}\,\theta_+\,I^{\alpha_2,\beta_2}\varphi + \theta_+\,D^{\alpha_2,\beta_2} + \theta_\,I^{\alpha_1,\beta_1}\varphi \qquad (34)$$

स्पष्ट है कि किसी फलन $f(u,v)$ के लिए

$$\theta_\,I_{+}^{\alpha,\beta}\,\theta_+ f = \frac{\theta_(x,y)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\frac{\theta_+(u,v)\,(f(u,v)}{(x-u)^{1-\alpha}\,(y\ \ v)^{1-\beta}}\,du\,dv \equiv 0$$

(35)

अतः (34) में तृतीय पद विलुप्त हो जाता है। इसके आगे पुनः (35) के अनुसार प्रथम पद

$$\theta_\,D^{\alpha_1\beta_1}\,\theta_\,I_{+}^{\alpha_1,\beta_1}\varphi = \theta_\,D_{+}^{\alpha_1,\beta_1}\,I_{+}^{\alpha_1,\beta_1}\varphi \equiv \theta_(x,y)\,\varphi(x,y) \qquad (36)$$

के तुल्य है क्योंकि लिओविले अवकलन व्युत्क्रम है लिओविले समाकलन का। इसी तरह (34) में द्वितीय पद को निम्न रूप में लिखा जा सकता है-

$$\theta_+ D_+^{\alpha_2, \beta_2}\, \theta_+\, I_+^{\alpha_2, \beta_2}\, \varphi = \theta_+ D_+^{\alpha_2, \beta_2} I_+^{\alpha, \beta_2}\, \varphi - \theta_+ D_+^{\alpha_2, \beta_2}\, \theta_-\, I^{\alpha_2, \beta_2}\, \varphi$$

$$= \theta_+ (x, y)\, \varphi (x, y) - \theta_+ D_+^{\alpha_2, \beta_2}\, \theta_-\, I_+^{\alpha_2, \beta_2}\, \varphi \qquad (37)$$

(34) में (36) तथा (37) को प्रतिस्थापित करने पर हमें प्राप्त होगा-

$$D_+^{\alpha (x) \beta (y)} I_+^{\lambda (x) \mu (y)} \varphi = \varphi (x, y) + \theta_+ D_+^{\alpha_2, \beta_2} \theta_- I^{\alpha_1, \beta_1} \varphi - \theta_+ D_+^{\alpha_2, \beta_2} \theta_- I_+^{\alpha_2, \beta_2} \varphi \qquad (38)$$

अब उपर्युक्त के दक्षिण पक्ष को सरल करने के लिए हम निम्नलिखित परिणाम [देखें [4]] का प्रयोग करते हैं।

प्रमेय 2.9 : माना कि $\varphi (x, y)\, \varepsilon\, L' (R')$ तथा $0 < \text{Re}\, \alpha < 1$; $0 < \text{Re}\, \beta < 1$ तब

$$\theta_+ (x, y)\, I_+^{\alpha, \beta}\, \varphi = I_+^{\alpha, \beta}\, \psi, \quad -\infty < x < \infty;\ -\infty < y < \infty,$$

जहाँ

$$\psi (x, y) = \theta_+ (y, y) \left[\varphi (x, y) + \Sigma_8 \int_0^\infty \int_0^\infty \Sigma_9\, du\, dv \right]$$

जहाँ

$$\Sigma_8 = \frac{\sin \alpha \pi \sin \beta \pi}{\pi^2}; \qquad \Sigma_9 = \left[\left(\frac{u}{x} \right)^\alpha \left(\frac{v}{y} \right)^\beta \frac{\varphi (-u, -v)}{(u + x)(v + y)} \right]$$

टिप्पणी 2.10 : निर्देश [2] में प्रमेय 2.9(2) में $\varphi(x, y)\ \varepsilon\ L^p(R')$; $1 < P < 1/(\text{Re}\, \alpha)$; $1 < \rho\ (\text{Re}\, \beta)$ के लिए दी हुई है। किन्तु यह $\rho = 1$ के लिए भी सत्य है। [2] में प्रतिबन्ध $\rho > 1$ की आवश्यकता केवल यह दिखाने के लिए है कि $\psi(x, y) \in L$। हमें इसकी यहाँ आवश्यकता नहीं है।

उपप्रमेय 2.11 निम्नांकित समिका सत्य है

$$\theta (x, y) I_+^{\alpha, \beta}\, \varphi = I_+^{\alpha, \beta}\, g, \qquad - < x < \infty,\ - < y < \infty,$$

जहाँ

$$g(x, y) = g_{\alpha, \beta}(x, y) = \theta_{-}(x, y)\, \varphi\ \ x, y) + \Sigma_8\, \theta_{+}(x, y) \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Sigma_9\, du\, dv \qquad (39)$$

(38) में द्वितीय तथा तृतीय पद में इस उपप्रमेय को व्यवहृत करने पर-

$$D_{+}^{\alpha(x)\beta(y)} I_{+}^{\alpha(x)\beta(y)} \varphi = \varphi(x, y) - \theta_{+}(x, y)\, D_{+}^{\alpha_2, \beta_2} I_{+}^{\alpha_2, \beta_2} g_{\alpha_2, \beta_2} + \theta_{+} D_{+}^{\alpha_2, \beta_2} I_{+}^{\alpha_1, \beta_1} g_{\alpha_1, \beta_1}$$

यहाँ पर $D_{+}^{\alpha_2, \beta_2} I_{+}^{\alpha_2, \beta_2} g_{\alpha_2, \beta_2} = g_{\alpha_2, \beta_2}$ अन्तिम पद से निपटने के लिए हम निश्चितंता हेतु कल्पना करते हैं कि $\alpha_1 > \alpha_2 ; \beta_1 > \beta_2$ दशा $\alpha_1 < \alpha_2 ; \beta_1 < \beta_2$ को इसी तरह से सुलझाते हैं। तब

$$D_{+}^{(\alpha x)\beta(y)} I_{+}^{(\alpha x)\beta(y)} \varphi = \varphi(x, y) - \theta_{+}(x, y) g_{\alpha_2, \beta_2}(x, y) + \theta_2(x, y) I_{+}^{(\alpha_1 - \alpha_2)(\beta_1 - \beta_2)} g_{\alpha_1, \beta_1}^{(x, y)}$$

या

$$D_{+}^{(\alpha x)\beta(y)} I_{+}^{(\alpha x)\beta(y)} \varphi = \varphi(x, y) + \Sigma_5\, \theta_{+}(x, y) \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \Sigma_{10}\, du\, dv$$

अथवा

$$D_{+}^{\alpha(x)\beta(y)} I_{+}^{\alpha(x)\beta(y)} \varphi = \varphi(x, y)\, \Sigma_5\, \theta_{+}(x, y) \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \Sigma_{10}\, du\, dv$$
$$+ \frac{\theta_{+}(x, y)}{\Gamma(\alpha_1 - \alpha_2)\, \Gamma(\beta_1 - \beta_2)} \int_{-\infty} \int_{0\infty}^{0} \Sigma_{11}\ du\, dv$$
$$- \Sigma_{12} \frac{\theta_{+}(x, y)}{\Gamma(\alpha_1 - \alpha_2)\, \Gamma(\beta_1 - \beta su2)} \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} \Sigma_{13}\, du\, dv \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \Sigma_{14}\, d\xi\, d\chi$$

जहाँ

$$\sum_{10} = \left[\left(\frac{|u|}{x} \right)^{\alpha_2} \left(\frac{|v|}{y} \right)^{\beta_2} \frac{\varphi(u, v)}{(u - x)(v - y)} \right];$$

$$\sum_{11} = \left[\frac{\varphi(u, v)}{(x - u)^{1 - \alpha_1 + \alpha_2} (y - v)^{1 - \beta_1 + \beta_2}} \right]$$

$$\sum_{12} = \frac{\sin\alpha_1 \pi \sin \beta_1 \pi}{\pi^2};$$

$$\sum_{13} = \frac{\theta_+ (u,v)}{(x-u)^{1-\alpha_1+\alpha_2} (y-v)^{1-\beta_1+\beta_2}}$$

$$\sum_{14} = \left(\frac{-\xi}{u}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{-\chi}{v}\right)^{\beta_1} \frac{\varphi(-\xi, -\chi)}{\xi+x)(\chi+y)} \, d\xi \, d\chi$$

अन्तिम पद में समाकलन के क्रम का विनिमय करने पर हमें आन्तरिक समाकल

$$\int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{\alpha_1-\alpha_2-1} (y-v)^{\beta_1-\beta_2-1}}{u^{\alpha_1} (u+\xi) \, v^{\beta_1} (v+\chi)} \, du \, dv$$

प्राप्त होता है जो $u = x z_1$, $v = y z_2$ परिवर्तन के बाद (26) द्वारा

$$\frac{\Gamma(1-\alpha_1)\,\Gamma(1-\beta_1)}{\Gamma(1-\alpha_2)\,\Gamma(1-\beta_2)} = \frac{1}{\xi \, x^{\alpha_2} \, \chi \, y^{\beta_2}} \, F^{0:2:1}_{0:2:1}(=)$$

में समानीत हो जाता है जहाँ

$$F^{0:2:1}_{0:2:1}(**) = F^{0:2:1}_{0:2:1}\left(\begin{matrix} 1, 1-\alpha_1; & 1, 1-\beta_1; & -\frac{x}{\xi}, -\frac{y}{\chi} \\ 1-\alpha_2; & 1-\beta_2; & \end{matrix}\right)$$

अतः

$$D_+^{\alpha(x)\,\beta(y)} I_+^{\alpha(x)\,\beta(y)} \varphi = \varphi(x,y) - \Sigma_5 \, \theta_+(x,y) \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \sum_{10} du \, dv$$

$$+ \frac{\theta_+(x,y)}{\Gamma(\alpha_1-\alpha_2)\,\Gamma(\beta_1-\beta_2)} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \sum_{11} du \, dv$$

$$- \frac{\theta_+(x,y)\, x^{-\alpha_2} y^{-\beta_2}}{\Gamma(\alpha_1 \Gamma(1-\alpha_2)\,\Gamma(\beta_1)\,\Gamma(1-\beta_2)}$$

$$\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 |\xi|^{\alpha_1-1} \, |\chi|^{\beta_1-1} \, F^{0:2:1}_{0:2:1}(--)\, \varphi(\xi, \chi)\, d\xi \, d\chi$$

जहाँ

$$F^{0:2:1}_{0:2:1}(--) = F^{0:2:1}_{0:2:1}\left(\begin{matrix} 1, 1-\alpha_1; & 1, 1-\beta_1; & \frac{x}{\xi}, \frac{y}{\chi} \\ 1-\alpha_2; & 1-\beta_2; & \end{matrix}\right)$$

यहाँ पर सूत्र (31) को व्यवहृत करने पर हमें (33) मिलता है।

टिप्पणी 2.12 चूँकि $F(1, 1+\alpha;\ 1+\alpha;\ z) = (1-z)^{-1}$ अतः इससे यह मिलता है कि $\alpha_1 = \alpha_2$; $\beta_1 = \beta_2$ होने पर (33) का दक्षिण पक्ष $\varphi(x, y)$ से संपाती होता है।

2.5 दशा (32) में $I_{+}^{\alpha(x), \beta(y)}$ के व्युत्क्रम संकारक-प्रश्न 4

अंतः संकाय $D_{+}^{\alpha(x), \beta(y)}$ सामान्यतः $I_{+}^{\alpha(x), \beta(y)}$ के व्युत्क्रम नहीं हैं। प्रमेय 2.8 में दिये एक सरल उदाहरण से निम्नांकित अनुमान करने का लोभ होता है।

अनुमान : सम्बन्ध $D_{+}^{\alpha(x), \beta(y)} I_{+}^{\alpha(x), \beta(y)} \varphi \equiv \varphi$ सत्य है तभी जब $\alpha(x) \equiv$ अचर, $\beta(y) \equiv$अचर। पहले ही पाद फलन $\alpha(x)$; $\beta(y)$ का उदाहरण दिखाता है कि यदि हम (2) $I_{a+, b+}^{\alpha(x), \beta(y)}$ को परिभाषित करें तो $I_{a+, b+}^{\alpha(x), \beta(y)}$ का व्युत्क्रम संकारक $D_{a+, b+}^{\alpha(x), \beta(y)}$ नहीं है जैसा कि (3) के द्वारा परिभाषित है।

निम्नांकित प्रमेय में हम संकारक $I_{a+, b+}^{\alpha(x), \beta(y)}$ का असली व्यत्क्रम पाद फलन क्रम (32) के साथ निर्मित करते हैं।

प्रमेय 2.13 माना $f(x, y) = I_{+}^{\alpha(x), \beta(y)} \varphi$ (32) में परिभाषित पाद क्रम $\alpha(x), \beta(y)$ के साथ $0 < \text{Re}\, \alpha_k < 1, 0 < \text{Re}\, \beta_k < 1, k = 1, 2$ सहित। तब

$$\alpha(x, y) = D_{+}^{\alpha(x), \beta(y)} f - A f \tag{40}$$

जहाँ अतिरिक्त पद

$$Af = \theta_{+} D_{+}^{\alpha_2, \beta_2} \theta_{-} f + Bf(x, y) = \frac{\theta_{+}(x, y)}{\Gamma(-\alpha_2)\,\Gamma(-\beta_2)} \int_{-\infty}^{0} \int_{-\infty}^{0} \Sigma_{15}\, du v + Bf(x, y) \tag{41}$$

जहाँ

$$\sum\nolimits_{15} = \frac{f(u, v)}{(x-u)^{1+\alpha_1}\,(y-v)^{1+\beta_1}}$$

संकारक B के साथ निम्नांकित विरूपणों को मानते हुए–

$$Bf = \theta_{+} D_{+}^{\alpha_2, \beta_2}\ \theta_{+} I_{+}^{\alpha_2, \beta_2} \theta_{-} D_{+}^{\alpha_1, \beta_1} f \tag{42}$$

$$= \theta_{+} S_{\alpha_2, \beta_2} \theta_{-} D_{+}^{\alpha_2, \beta_2} f \tag{43}$$

$$= -\frac{\theta_+(x,y)}{\Gamma(1-\alpha_2)\Gamma(1-\beta_2)\Gamma(1+\alpha_2-\alpha_1)\Gamma(1+\beta_2-\beta_1)} \times$$

$$\frac{d^2}{dxdy}\left\{\frac{1}{x^{\alpha_2}y^{\beta_2}}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} |u|^{\alpha_2-\alpha_1}|\beta_2-\beta_1\ F^{0:2:1}_{0:2:1}\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} f(u,v)\,dudv\right\} \tag{44}$$

जहाँ

$$F^{0:2:1}_{0:2:1}\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix} = F^{0:2:1}_{0:2:1}\left(\begin{matrix} 1, & \alpha_2; & 1, & \beta_2; \\ & 1+\alpha_2; & & 1+\beta_2; \end{matrix}\ \frac{u}{x}, \frac{v}{y}\right)$$

जहाँ एकांकी संकारक $S_{\alpha,\beta}$ को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है–

$$S_{\alpha,\beta}\, g = \Sigma_8 \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\left(\left|\frac{s}{x}\right|^{\alpha}\right)\left(\left|\frac{q}{y}\right|^{\beta}\right)\frac{g(s,q)}{(s-x)(q-y)}\,dsdq$$

उपपत्ति : दिये हुए सम्बन्ध $I_+^{\alpha(x),\beta(y)}\varphi = f(x,y)$ से $\varphi(x,y)$ ज्ञात करना अर्थात्

$$\theta_-(x,y)\, I_+^{\alpha_1,\beta_1}\varphi + \theta_+(x,y)\, I_+^{\alpha_2,\beta_2}\varphi = f(x,y) \tag{46}$$

हम $x<0, y<0$ एवं $x>0, y>0$ दशाओं पर पृथक पृथक विचार करते हैं–

(i) माना $x<0, y<0$ तो (46)

$$\frac{1}{\Gamma\alpha_1\Gamma\beta_1}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{y}(x-u)^{\alpha_1-1}(y-v)^{\beta_1-1}\varphi(u,v)\,dudv = f(x,y)$$

में समानीत हो जाता है। अतः

$$\varphi(x,y) = D_+^{\alpha,\beta} f(x,y),\ x<0, y<0 \tag{47}$$

(ii) माना $x>0, y>0$ तो (46) से

$$\frac{1}{\Gamma\alpha_2\Gamma\beta_2}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}\Sigma_{16}\,dudv + \frac{1}{\Gamma\alpha_2\Gamma\beta_2}\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y}\Sigma_{16}\,dudv = f(x,y) \tag{48}$$

जहाँ
$$\sum_{16} = \frac{\varphi(u, v)}{(x - u)^{1-\alpha_2} (y - u)^{1-\beta_2}}$$

का उपयोग (48) के प्रथम पद में दिये गये $\varphi(x, y)$ को प्रतिस्थापित करने के लिए कर सकते हैं। तब

$$\frac{1}{\Gamma\alpha_2\Gamma\beta_2} \int_0^x \int_0^y \Sigma_{16}\, du\, dv = f(x,y) - Z_7 \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 \Sigma_{17}\, du\, dv \frac{d^2}{du\, dv} \int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v ds\, dq \tag{49}$$

जहाँ

$$Z_7 = \frac{1}{\Gamma\alpha_2 \Gamma\beta_2\ \Gamma(1-\alpha_1)\ \Gamma(1-\beta_1)}$$

$$\sum_{17} = \frac{1}{(x-u)^{1-\alpha_2}} (y-v)^{1-\beta_2};$$

$$\sum_{18} = \frac{f(s, q)}{(u-s)^{\alpha_1} (v-q)^{\beta_1}}$$

इसका दाहिना पक्ष एक ज्ञात फलन है। समीकरण (49) को अबेल समीकरण के रूप में व्युत्क्रमित करने पर

$$\varphi(x, y) = D_{0+;\,0+}^{\alpha_2;\,\beta_2} f - \frac{\Sigma_5}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\beta_1)} \frac{d^2}{dxdy} \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y \theta_+(u, v)\ \Sigma_{19}\, dudv$$
$$\int_{-\infty}^u \int_{-\infty}^v \Sigma_{20}\ dsdq\ \frac{d^2}{dsdq} \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^q \Sigma_{21}\ d\xi_1\, d\xi_2,$$
$$x > 0,\ y > 0 \tag{50}$$

जहाँ

$$\sum_{19} = \frac{1}{(x-u)^{\alpha_2} (y-v)^{\beta_2}};$$

$$\sum_{20} = \frac{\theta_+(s, q)}{(u-s)^{1-\alpha_2} (v-q)^{1-\beta_2}};$$

$$\sum_{21} = \frac{f(z_1, z_2)}{(s-z_1)^{\alpha_1} (q-z_1)^{\beta_1}}$$

अन्तिम संख्या का अर्थ होता है कि

$$\varphi(x,y) = D_{+}^{\alpha_2,\beta_2}\theta_{+}f - D_{+}^{\alpha_2,\beta_2}\theta_{+} I_{+}^{\alpha_2,\beta_2}\theta_{+} D_{+}^{\alpha_1,\beta_1}f \qquad x>, y>0$$

पाद फलन $\theta_{\pm}(x, y)$ के द्वारा (47) तथा (50) को एकत्रित करने पर हमें निम्नांकित व्यंजक प्राप्त होता है

$$\varphi(x,y) = \theta_{+} D_{+}^{\alpha_1,\beta_1} f + \theta_{+}(x,y) D_{+}^{\alpha_2,\beta_2}\theta_{+}f - \theta_{+}(x,y) D_{+}^{\alpha_2,\beta_2}\theta_{+} I_{+}^{\alpha_2,\beta_2}\theta_{+} D_{+}^{\alpha_1,\beta_1}f,$$

जो समस्त $x \in R^1$, $y \in R^1$ के लिए है। चूँकि $\theta_{+}f = f - \theta_{-}f$, अतः

$$\varphi(x,y) = \theta_{+} D_{+}^{\alpha_1,\beta_1} f + \theta_{+}(x,y) D_{+}^{\alpha_2,\beta_2}\theta_{+}f - Af = D_{+}^{\alpha(x),\beta(y)} f - Af$$

मिलता है जिसमें A को (41) तथा (42) से व्यक्त किया जाता है।

यह दिखाना शेष रह जाता है कि संकारक B को (43) तथा (44) द्वारा भी व्यक्त किया जा सकता है। स्पष्ट है $Bf(x) \equiv 0$ के लिए $x<0, y<0, x>0, y>0$ के लिए रूप (44)

$$Bf(x,y) = \frac{\Sigma_5}{\Gamma(1-\alpha_1)\,\Gamma(1-\beta_1)} \frac{d^2}{dx\,dy}\int_0^x\int_0^y (x-u)^{-\alpha_2}(y-v)^{-\beta_2} \boldsymbol{Kf(u,v)}\,du\,dv$$

जहाँ हम सूचित करते हैं–

$$\boldsymbol{Kf(u,v)} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} (u-s)\,\alpha_2 - 1\,(v-q)^{\beta_2-1}\,ds\,dq$$
$$\frac{d^2}{ds\,dq}\int_{-\infty}^{s}\int_{-\infty}^{q} (s-z_1)^{-\alpha_1}(q-z_2)^{-\beta_2}\,dz_1\,dz_2$$

खंडशः समाकलन करने पर

$$\boldsymbol{Kf(u,v)} = u^{(\alpha_2-1)}v^{(\beta_2-1)}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0}(-z_1)^{\alpha_1}(-z)^{\alpha_2} f(z_1,z_2)\,dz_1\,dz_2$$
$$+ (\alpha_2-1)(\beta_2-1)\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} f(z_1,z_2)\,dz_1\,dz_2$$
$$\int_{z_1}^{0}\int_{z_2}^{0}(u-s)^{\alpha_2-2}(v-q)^{\beta_2-2}(s-z_1)^{-\alpha_1}(q-z_2)^{-\beta_2}\,ds\,dq$$

अतः

$$B f(x, y)=\frac{\Sigma_5}{\Gamma (1-\alpha_1 (\Gamma (1-\beta_1) \, dx \, dq} \frac{d^2}{dx \, dy} \int_0^x \int_0^y \Sigma_{22} \, du \, dv$$

$$\int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 (-z_1)^{-\alpha_1} (-z_2)^{-\beta_2} f(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2$$

$$+\frac{(\alpha_2-1)(\beta_2-1)}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\beta_1)} \Sigma_5$$

$$\frac{d^2}{dx \, dy} \int_0^x \int_0^y \Sigma_{19} \, du \, dv \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(z_1, z_2) \, dz_1 \, dz_2 \int_{z_1}^0 \int_{z_2}^0 \Sigma_{23} \, dz_1 \, dz_2$$

जहाँ

$$\Sigma_{22}=u(\alpha_2-1) \, v(\beta_2-1)(x-u)^{-\alpha_2}(y-v)^{-\beta_2};$$

$$\Sigma_{23}=(u-s)^{\alpha_2-2}(v-q)^{\beta_2-2}(s-z_1)^{-\alpha_1}(q-z_2)^{-\beta_1}$$

प्रथम पद में $u = xu_1$ तथा $v = yv_1$ चरों के परिवर्तन से प्रकट होता है कि यह शून्य के तुल्य है। इसलिए द्वितीय पद में समाकलन के क्रम का विनिमय करने पर अतः

$$B f(x, y)=\frac{(1-\alpha_2)(1-\beta_2)}{\Gamma(1-\alpha_1)\Gamma(1-\beta_1)} \Sigma_5 \frac{d^2}{dx \, dy} \int_{-\infty}^0 \int_{-\infty}^0 f(z_1, z_2) I(x, z_1) \; I(y, z_2) \, dz_1 \, dz_2 \quad (51)$$

जहाँ

$$I(x, z_1)=\int_0^x (x-u)^{-\alpha_2} du \int_{z_1}^0 (u-s)^{\alpha_2-2}(s-z_1)^{-\alpha_1} ds$$

$$=\int_{z_1}^0 (s-z_1)^{-\alpha_1} ds \int_0^x (x-u)^{-\alpha_2}(u-s)^{\alpha_2-2} du$$

$$I(y, z_2)=\int_0^y (y-v)^{-\beta_2} dv \int_{z_2}^0 (v-q)^{\beta_2-2}(q-z_2)^{-\beta_1} dq$$

$$=\int_{z_2}^0 (q-z_2)^{-\beta_1} dq \int_0^y (y-v)^{-\beta_2}(v-q)^{\beta_2-2} dv$$

$u = x-(x-s)\,a^{-1}$ एवं $v = y-(y-q)\,b^{-1}$ चरों में परिवर्तन करने से क्रमशः प्राप्त होंगे–

$$\int_0^x \frac{du}{(x-u)^{\alpha_2}(x-s)^{2-\alpha_2}} = \frac{1}{(x-s)} \int_{\frac{x-s}{x}}^{\infty} (a-1)^{\alpha_2-2}\,da = \frac{(-s/x)^{\alpha_2-1}}{(1-\alpha_2)(x-s)}$$

तथा

$$\int_0^y \frac{dv}{(y-v)^{\beta_2}(y-q)^{2-\beta_2}} = \frac{1}{(y-q)} \int_{\frac{y-q}{y}}^{\infty} (b-1)^{\beta_2-2}\,db = \frac{(-q/y)^{\beta_2-1}}{(1-\beta_2)(y-q)}$$

अतः

$$I(x, z_1) = \frac{1}{(1-\alpha_2)} \int_0^{z_1} \frac{(s/x)^{\alpha_2-1}}{(-z_1-s)^{\alpha_1}(x+s)}\,ds$$

एवं

$$I(y, z_2) = \frac{1}{(1-\beta_2)} \int_0^{z_2} \frac{(q/y)^{\beta_2-1}}{(-z_2-q)^{\beta_1}(y+q)}\,dq$$

इसलिए (51) से

$$Bf(x,y) = \frac{\Sigma_5}{\Gamma(1-\alpha_1)\,\Gamma(1-\beta_1)} \frac{d^2}{dx\,dy} \int_0^\infty \int_0^\infty f(-z_1, z_2)\,dz_1\,dz_2 \int_0^{z_1} \int_0^{z_2} \Sigma_{24}\,ds\,dq \quad (52)$$

जहाँ

$$\Sigma_{24} = \left(\frac{s}{x}\right)^{\alpha_2-1} \left(\frac{q}{y}\right)^{\beta_2-1} \frac{1}{(x+s)(z_1-s)^{\alpha_1}(y+q)(z_2-q)^{\beta_1}}$$

यहाँ पर आन्तरिक समाकल (26) के द्वारा

$$\frac{z_1^{\alpha_2-\alpha_1} z_2^{\beta_2-\beta_1}}{x^{\alpha_2} y^{\beta_2}} \int_0^1 \int_0^1 \frac{s^{\alpha_2-1} q^{\beta_2-1}}{(1-s)^{\alpha_1}\left(1+\frac{z_1}{x}s\right)(1-q)^{\beta_1}\left(1+\frac{z_2}{y}q\right)}$$

$$= \frac{\Gamma\alpha_2\,\Gamma(1-\alpha_1)\,\Gamma\beta_2\,\Gamma(1-\beta_1)}{\Gamma(1+\alpha_2-\alpha_1)\,\Gamma(1+\beta_2-\beta_1)\,x^{\alpha_2} y^{\beta_2}} F^{0:2:1}_{0:2:1}\begin{pmatrix} + \\ + \\ + \end{pmatrix}$$

के तुल्य है अतः (52) संपाती है (44) के

जहाँ

$$F^{0:2:1}_{0:2:1}\begin{pmatrix}+\\+\\+\end{pmatrix}=F^{0:2:1}_{0:2:1}\left(\begin{matrix}1, & \alpha_2\,; \\ & \alpha_2-\alpha_1+1\,;\end{matrix}\;\begin{matrix}1, & \beta_2\,; \\ & \beta_2-\beta_1+1\,;\end{matrix}\;\begin{matrix}\frac{-z_1}{x}, & \frac{-z_2}{y}\end{matrix}\right)$$

(b) रूप (43)। (42) में प्रमेय (2.9) को सम्प्रयुक्त करने पर हमें मिलता है ($g=D^{\alpha,\beta}_{+}f$ सहित)

$$D^{\alpha_2,\beta_2}_{+}\theta_+ I^{\alpha_2,\beta_2}_{+}\theta_- g = D^{\alpha_2,\beta_2}_{+}I^{\alpha_2\beta_2}_{+}\psi = \psi$$

साथ ही

$$\psi(x,y)=\Sigma_5\,\theta_+(x,y)\int_0^\infty\int_0^\infty\left(\frac{u}{x}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{v}{y}\right)^{\beta_2}\frac{\psi(-u,-v)}{(u+x)(v+y)}\,du\,dv$$

जिससे (42) तथा (43) का सम्पाती होना प्रकट है।

टिप्पणी 2.14 इसकी सम्पुष्टि स्वाभाविक है कि (40)में अतिरिक्त पद Af विलुप्त हो जाता है यदि $\alpha_2=\alpha_1$ एवं $\beta_2=\beta_1$ इस दशा में

$$F(1,\alpha_2\,;1+\alpha_2-\alpha_1\,;-z_1/x)=F(1,\alpha_2\,;\;1\,;\,-z_1/x)=[z/(x+z_1)]^{\alpha_2}\alpha$$

तथा

$$F(1,\beta_2\,;1+\beta_2-\beta_1\,;\,-z_2/y)=F(1,\beta_2\,;\;1\,;\,-z_2/y)=[y/(y+z_2)]^{\beta_2}$$

तब (44) से हमें सरलतापूर्वक $Af(x)\equiv 0$ प्राप्त होता है।

टिप्पणी 2.15 टिप्पणी 2.14 को अग्रसारित करते हुए हम अतिरिक्त पद Af को ऐसे रूप में प्रदर्शित कर सकते हैं जो स्पष्टतः Af के विलोपन को $\alpha_2=\alpha_1, \beta_2=\beta_1$ रूप में दर्शित करता है। वास्तव में, वैश्लेषिक संतत सूत्र को निम्नांकित हाइपरज्यामितीय फलन के लिए व्यवहृत करने पर

$$F(a,b\,;c\,;z)=B_1(1-z)^{-a}F[a,c\,;a-b+1\,;(1-z)^{-1}]$$

$$+B_2(1-z)^{-b}F[b,c-a\,;b-a+1\,;(1-z)^{-1}]$$

जिसमें B_1 तथा B_2 (31) की तरह हैं जैसा कि (44) में व्यंजक है, तो हम थोड़े से परिकलन के बाद निम्नांकित सूत्र तक पहुँचते हैं।

$$A f(x, y) = \theta_+ (x, y) \left\{ \left(D_+^{\alpha_2, \beta_2} - \frac{1}{\Gamma(1+\alpha_2-\alpha_1)\,\Gamma(1+\beta_2-\beta_1)} D_+^{\alpha_1, \beta_1} \right) \theta_- f + R f \right\}$$

जहाँ

$$R f(x, y) = \theta_+ D_+^{\alpha_2, \beta_2} \theta_+ I_+^{\alpha_2, \beta_2} \theta_- D_+^{\alpha_1, \beta_1} f$$

$$= \theta_+ S_{\alpha_2, \beta_2} \theta_- D_+^{\alpha_2, \beta_2} f$$

$$= \frac{(\alpha_2-\alpha_1)(\beta_2-\beta_1)}{\Gamma(2-\alpha_2)\,\Gamma(1+\alpha_2-\alpha_1)\,\Gamma(2-\beta_2)\,\Gamma(1+\beta_2-\beta_1)} \times$$

$$\cdot \frac{d^2}{dx\,dy} \left[x^{(1-\alpha_2)} y^{(1-\beta_2)} \int_0^\infty \int_0^\infty \Sigma_{25} F^{0:2:1}_{0:2:1} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} d\xi\, d\chi \right]$$

जहाँ

$$\Sigma_{25} = f(-\xi, -\chi) \frac{\xi^{(\alpha_2-\alpha_1)} \chi^{(\beta_2-\beta_1)}}{(\xi+x)(\chi+y)}$$

$$F^{0:2:1}_{0:2:1} \begin{pmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{pmatrix} = F^{0:2:1}_{0:2:1} \left(\begin{matrix} 1, & 1-\alpha_1; & 1 & 1-\beta_1; & x & y \\ & 2-\alpha_2; & & 2-\beta_2; & \overline{x+\xi}, & \overline{y+\chi} \end{matrix} \right)$$

निर्देश

1. काम्पेद फेरी, जे. : C. R. Acad. Sci. Paris, 1921, 173, 401–404.

2. सैम्को, एस. जी. तथा बेट्राम रॉसः : Integral Transforms and Special Functions, 1993, 1(4), 277–300.

3. एर्डेल्यी, ए. तथा अन्य : Higher Transcendental Functions, I. मेकग्राहिल बुक कम्पनी, न्यूयार्क 1953.

4. सैमको, एस. जी., किल्बस, ए. ए. तथा मैरिचेव, ओ. आई. : Fractional integrals and Derivatives and some of their applications (Russian), Minsk, "*Mauka i Technica*", 1987 अंग्रेजी अनुवाद "Fractional Integrals and Derivatives—Theory and Applications", Gordon & Breach Sci. Publ. न्यूयार्क, 1992.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.1, January, 2000.

एक फलन की संयुग्मी श्रेणी के भारित $(L^p, \xi(t))$ वर्ग से सम्बन्धित फलन की सन्निकटन कोटि

श्यामलाल

गणित तथा सांख्यिकी विभाग, हरिश्चन्द्र स्नातकोत्तर महाविद्यालय, वाराणसी

तथा

दया शंकर त्रिपाठी

गणित विभाग, सनातन धर्म इण्टर कालेज, वाराणसी

[प्राप्त – सितम्बर 1, 1999]

सारांश

इस प्रपत्र में उस फलन के सन्निकटन की कोटि पर एक प्रमेय की स्थापना की गई है जो फूरियर श्रेणी की संयुग्मी श्रेणी के $(C, 1)(E, 1)$ माध्यों द्वारा भारित वर्ग $W(L^p, \xi(t))$ से सम्बद्ध है।

Abstract

On degree of approximation of function belonging to the weighted (Lp, $\xi(t)$) . *By* Shyam Lal, Department of Mathematics & Statistics, Harish Chandra Post-Graduate College, Varanasi, and Daya Shankar Tripathi, Department of Mathematics, Sanatan Dharm Inter College, Varanasi.

In this paper, theorem on degree of approximation of function belonging to the weighted class $W(L^P, \xi(t))$ by $(C, 1)$ $(E, 1)$ means of its conjugate series of a Fourier series has been established.

1. परिभाषाएँ तथा संकेतन

माना कि $f(t)$ आवर्त 2π के साथ आवर्ती है और लेबेस्ग के अनुसार समाकलनीय है। $f(t)$ की फूरियर श्रेणी को निम्नवत् दिया जाता है–

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\,t + b_n \sin n\,t)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} A_n\,(t) \qquad (1.1)$$

और तब

$$\overline{f(t)} \sim \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \;\sin n\,t - b_n \;\sin n\,t)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,(t) \qquad (1.2)$$

फूरियर श्रेणी (1.1) की संयुग्मी श्रेणी के नाम से जानी जाती है। हम परिभाषित करते हैं –

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p}, \;\; p \geq 1) \;(1.3$$

तथा सन्निकटन की कोटि $E_n\,(f)$ को

$$E_n\,(f) = \text{Min}\|f - T_n\|_p \qquad (1.4)$$

द्वारा व्यक्त करेंगे जहाँ $T_n\,(x)$ n कोटि का त्रिकोणमितीय बहुपद है।

फलन $f \;\varepsilon\, \text{Lip}\;\alpha$ यदि

$$f(x+t) - f(x) = 0\;(|t|^{\alpha}) \qquad 0 < \alpha \leq 1 \text{ के लिए} \qquad (1.5)$$

$$f(x)\;\varepsilon\;\text{Lip}\,(\alpha\,, p), \qquad a \leq x \leq b, \text{ के लिए}$$

$$\left\{ \int_b^a |f(x+1) - f(x)^p \, dx \right\}^{1/p} = 0(|t|^{\alpha}), \; 0 < \alpha 1, \; P = 1 \quad (1.6)$$

(मैकफैडेन की परिभाषा 5.38)

धनात्मक वर्धमान फलन ξ (t) तथा पूर्ण संख्या $p \geq 1$ दिये हुए हैं।

$$f(x) \, \varepsilon \, \text{Lip} \, (\xi(t), p)$$

यदि
$$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p} = 0(\xi(t)) \quad (1.7)$$

तथा $f(x) \; \varepsilon \; W(L^P, \xi(t))$ यदि

$$\left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|^p \sin^{\beta p} x \, dx \right\}^{1/p} = 0(\xi(t)), \; (\beta \geq 0) \quad (1.8)$$

$\beta = 0$ होने पर हम पाते हैं कि $W(L^p, \xi(t))$ श्रेणी Lip $(\xi(t), p)$ से संपात करती है।

यदि

$$E_n^1 = 2^{-n} \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{b}{k} s_k \to s \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty \quad (1.9)$$

तो अनन्त श्रेणी $\sum_{n=0} a_n$ अपने आंशिक योगफलों S_n सहित निश्चित संख्या S तक संकलनीय $(E, 1)$ कहलाती है।

$(E, 1)$ रूपान्तर E_n^1 का $(C, 1)$ रूपान्तर श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ के आंशिक योग S_n के $(C, 1)(E, 1)$ रूपान्तर को परिभाषित करता है।

इस तरह यदि

$$(CE)\frac{1}{n} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} E_k^1 \to S, \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty, \quad (1.10)$$

जहाँ E_n^1 प्रदर्शित करता है S_n के $(E, 1)$ रूपान्तर को। तब श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ को $(C, 1)(E, 1)$ माध्यों

द्वारा संकलनीय या केवल s तक संकलनीय $(C, 1)\ (E, 1)$ कहा जाता है।

हम निम्नांकित संकेतन का प्रयोग करेंगे–

$$\psi(t) = f(x + t) - f(x - t)$$

2. ज्ञात प्रमेय

कुरेशी ने [5] निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध की है।

प्रमेय : यदि $f(x)$ आवर्ती फलन हो और $0 < \alpha < 1$ के लिए वर्ग $Lip\ \alpha$ से सम्बन्धित हो तथा $\frac{R(y)}{y^{\alpha}}$ अह्रासमान हो तो

$$\left| f - T_n^{p,q} \right| \ O\left(\frac{1}{n}\alpha\right).$$

जहाँ $T_n^{p,q}$ (1.1) श्रेणी के प्रायः नार्लुण्ड माध्य हैं।[5]

3. मुख्य प्रमेय

कई लेखकों [1, 2, 5, 6, 7, 8] ने माध्यों तथा नार्लुण्ड माध्यों द्वारा $Lip\,\alpha$ से सम्बन्धित फलन के सन्निकटन की कोटि की व्याख्या की है। किन्तु अभी तक $(C, 1)\ (E, 1)$ रूप की गुणनफल संकलनीयताओं द्वारा फल की सन्निकट कोटि प्राप्त करने के बारे में कोई शोध कार्य नहीं हुआ। इस दिशा में प्रयास करने के फलस्वरूप $W(L^p, \xi(t))$ वर्ग से सम्बद्ध फलन की सन्निकटन कोटि पर एक प्रमेय प्राप्त किया गया है जिसका स्वरूप निम्नवत् है–

प्रमेय : आवर्ती फलन f जो 2π-आवर्ती फलन के संयुग्मी है जो इसकी संयुग्मी श्रेणी के $(C, 1)\ (E, 1)$ माध्यों द्वारा भारित $W(L^p, \xi(t))$ श्रेणी से सम्बन्धित है, उसे निम्न के द्वारा व्यक्त किया जाता है।

$$\left|\left| (CE)_n^1 - \overline{f}(x) \right|\right| = O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) n^{\beta + 1/p}\right)$$

बशर्ते कि $\xi(t)$ निम्नलिखित प्रतिबन्धों को तुष्ट करता हो

$$\left\{ \int_0^{1/n} \left(\frac{t\,\psi(t)}{\xi(t)} \right)^p \sin^{\beta p} dt \right\}^{1/p} = O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.1}$$

$$\left\{ \int_{1/n}^{\pi} \left(\frac{t^{-\delta} \psi(t)}{\xi(t)} \right)^{p} dt \right\}^{1/p} = O\left(n^{\delta}\right) \tag{3.2}$$

जहाँ $(CE)_n^1$ श्रेणी (2.1) के $(C, 1)\ (E, 1)$ माध्य हैं–

$$\bar{f}(x) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \cot\left(\frac{1}{2} t\right) dt,$$

तथा δ एक ऐसी यादृच्छिक संख्या है, जिससे कि $q(1-\delta)-1>0$, प्रतिबन्ध (3.1) तथा (3.2) x में समानरूप से लागू होते हैं।

4. आकलन

प्रमेय की उपपत्ति के लिए निम्नलिखित आकलन की आवश्यकता होगी

$$\cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right) = O(nt) \text{ क्योंकि } 0 \le t \le \frac{1}{n} \tag{4.1}$$

$0 \le t \le \frac{1}{n}$ के लिए

$$\cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right) = \left(1 - \left(\frac{t^2}{8} - \dots\right)\right)^n \left(\frac{nt}{2} - \frac{n^3 t^3}{48} + \dots\right)$$

$$= \left(1 - \frac{nt^2}{8}\right)\left(\frac{nt}{2} - \frac{n^3 t^3}{48}\right)$$

$$= \frac{nt}{2} - \frac{n^3 t^3}{48} - \frac{n^2 t^3}{16} + \frac{n^4 t^5}{384}$$

$$= \frac{nt}{2}\left(1 - \frac{n^2 t^2}{32} - \frac{nt^2}{8} + \frac{n^3 t^4}{192}\right)$$

$$= O(nt)$$

5. प्रमेय की उपपत्ति

लाल[3] का अनुसरण करते हुए तथा रीमान-लेबेस्ग प्रमेय को सम्प्रयुक्त करने पर $t = x$ पर

श्रेणी (1.2) के nवें आंशिक योगफल S_n को निम्नवत् लिखा जा सकता है –

$$s_n - \left(- \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \psi(t) \cot\left(\frac{1}{2} t\right) dt \right) = \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} \cos nt \, dt + 0(1)$$

S_n के $(E, 1)$ रूपान्तर E_n^1 को निम्नलिखित रूप में प्राप्त किया जा सकता है–

$$E_n^1 - f(x) = \frac{1}{\pi . 2^n} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos kt \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi . 2^n} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} R_p \left\{ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{ikt} \right\} dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} \cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{nt}{2}\right) dt \tag{5.1}$$

अब E_n^1 के $(C, 1)$ रूपान्तर यानी S_n के $(C, 1)$ $(E, 1)$ रूपान्तर को $(CE)_n^1$ द्वारा प्रदर्शित करने पर हमें $(C, 1)$ संकलन की नियमितता प्राप्त होती है–

$$(CE)_n^1 - f(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \cos^k\left(\frac{t}{2}\right) \cos\left(\frac{kt}{2}\right) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} R_p \left\{ \sum_{k=1}^{n} e^{ikt/2} \cos^k\left(\frac{t}{2}\right) \right\} dt$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} R_p \left[e^{it/2} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \frac{\left\{ 1 - e^{int/2} \cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \right\}}{1 - e^{it/2} \cos\left(\frac{t}{2}\right)} \right\} dt$$

$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t} \left[\frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\tan\left(\frac{t}{2}\right)} \right] dt$$

$$= O\left[\frac{1}{n} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\psi(t)}{t^2} \cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right) \right\} dt \right]$$

$$= O\left[\frac{1}{n} \left\{ \int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{n} \right\} \frac{\psi(t)}{t^2} \cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right) dt \right]$$

$$= O\left[I_1 + I_2 \right], \text{माना} \qquad (5.2)$$

अब

$$I_1 = \frac{1}{n} \int_0^{1/n} \frac{\psi(t)}{t^2} \cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right) dt$$

$$\left| I_1 \right| \leq \frac{1}{n} \int_0^{1/n} \frac{|\psi(t)|}{t^2} \cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right) dt.$$

होल्डर की असमता को व्यवहृत करते हुए तथा यह तथ्य कि $\psi(t) \in W(L^P, \xi(t))$ हमें प्राप्त होता है–

$$I_1 = O\left(\frac{1}{n}\right) \left[\int_0^{1/n} \left(\frac{t\, \psi(t)}{\psi(t)} \sin^{\beta} t \right)^P dt \right]^{1/P}$$

$$\left[\int_0^{1/n} \left\{ \frac{\psi(t)}{t^3} \cdot \frac{\cos^n\left(\frac{t}{2}\right) \sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{\sin^{\beta} t} \right\}^q dt \right]^{1/q}$$

$$= O\left(\frac{1}{n^2}\right) O\left[\int_0^{1/n}\left(\frac{\xi(t)\ n\,t}{t^3\, t^\beta}\right)^q\ dt\right]^{1/q},$$

माध्य मान प्रमेय को व्यवहृत करने पर (3.1) एवं (4.1) से

$$I_1 = O\left(\frac{\xi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)\left[\int_\varepsilon^{1/n} \frac{dt}{t^{(\beta+2)q}}\right]^{1/q} \quad \text{जहाँ} \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{n}$$

$$= O\left(\frac{\xi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)\left[\left(\frac{t^{-(\beta+2)q+1}}{-(\beta+2)q+1}\right)_\varepsilon^{1/n}\right]^{1/q}$$

$$= O\left(\frac{\xi\left(\frac{1}{n}\right)}{n}\right)\left[n^{(\beta+2)q-1}\right]^{1/q}$$

$$= O\left(\frac{\xi\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \cdot n^{\beta+2} - \frac{1}{q}\right)$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) n^{\beta+1} - \frac{1}{q}\right)$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) n^{\beta} + \frac{1}{P}\right)$$

जहाँ

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \text{ इस तरह कि } 1 \le p \le \infty \tag{5.1}$$

इसी तरह, उपर्युक्त की भाँति

$$I_2 = O\left(\frac{1}{n}\right)\left[\int_{1/n}^{\pi}\left(\frac{t^{-\delta}\,\psi(t)}{\xi(t)}\sin^{\beta} t\right)^{p} dt\right]^{1/p}$$

$$\left[\int_{1/n}^{\pi}\left\{\frac{\xi(t)\left|\left(\cos^{n}\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)\right)\right|^{q}}{t^2\, t^{-\delta}\sin^{\beta} t}\right\}\right]^{1/q}$$

$$= O\left(n^{\delta-1}\right) O\left(n^{\beta}\right) O\left[\int_{1/n}^{\pi}\left(\frac{\xi(t)}{t^{(2-\delta)}}\right)^{q} dt\right]^{1/q}$$

$$= O\left(n^{\beta+\delta-1}\right) O\left[\int_{1/\pi}^{n}\left(\frac{\xi\left(\frac{1}{y}\right)}{y^{\delta-2}}\right)^{q} \frac{dy}{y^2}\right]^{1/q}$$

$$= O\left(n^{\beta+\delta-1}\right) O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left[\int_{1}^{n}\frac{dt}{y^{q(\delta-2)+2}}\right]^{1/q} \quad \text{(माध्यमान प्रमेय द्वारा)}$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) n^{\beta+\delta-1}\right)\left[\left\{\frac{y^{-q(\delta-2)-1}}{-q(\delta-2)-1}\right\}^{n}\right]^{1/q},$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) n^{\beta+\delta-1}\right)\left(\left[n^{-q(\delta-2)-1}\right]^{1/q}\right)$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) n^{\beta+\delta-1}\cdot n^{-(\delta-2)-1/q}\right)$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) n^{\beta+1-1/q}\right)$$

$$I_2 = O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n^{\beta+1/p}\right) \quad (5.2)$$

अब (5.1) एवं (5.2) से

$$\left|(CE)\frac{1}{n} - \overline{f(x)}\right| = O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n^{\beta+1/q}\right)$$

$$\left\|(CE)\frac{1}{n} - \overline{f(x)}\right\| = O\left[\left\{\int_0^{2\pi}\left\{\xi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n^{\beta+1/p}\right\}^{\beta} dx\right]^{1/p}$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) n^{\beta+1/p}\right)\left(\int_0^{2\pi} dx\right)^{1/p}$$

$$= O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) n^{\beta+1/p}\right)$$

इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूरी हुई।

6. प्रमेय से निम्नलिखित उपप्रमेय परिभाषित हो सकते हैं–

उपप्रमेय_1 : यदि $\beta = 0$ तथा $\xi(t) = t^{\alpha}$ तो वर्ग Lip (α, p), $0 < \alpha \leq 1$ से सम्बन्धित आवर्ती फलन f सन्निकटन की कोटि को

$$\left|(CE)\frac{1}{n} - \overline{f(x)}\right| = O\left[\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha - \frac{1}{p}}\right]$$ द्वारा व्यक्त करते हैं।

उपपत्ति : चूँकि

$$\left| (CE)\frac{1}{n} - f(x) \right| = O\left(\xi\left(\frac{1}{n}\right) \cdot n^{\beta + 1/p} \right)$$

$$= O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha} \cdot n^{1/p} \right)$$

$$= O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha - 1/p} \right)$$

जिससे उपपत्ति पूरी होती है।

उपप्रमेय 2 : यदि उपप्रमेय 1 में $p \to \infty$ तो $0 < \alpha < 1$ के लिए हमें प्राप्त होगा–

$$\left| (CE)\frac{1}{n} - f(x) \right| = O\left(\frac{1}{n^{\alpha}} \right)$$

टिप्पणी : उपप्रमेय 1 को स्वतन्त्र प्रमेय की ही तरह से प्राप्त की जा सकती है।

कृतज्ञता–ज्ञापन

लेखकद्वय बनारस हिन्दूविश्वविद्यालय के गणित विभाग के प्रो० एल० एम० त्रिपाठी तथा प्रो० एस० एन० लाल के कृतज्ञ हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में अमूल्य सुझाव दिये।

निर्देश

1. एलेक्सिट्ज, जी. : Convergence problems of Orthogonal series पर्गमान प्रेस, लन्दन 1961

2. चन्द्र, प्रेम : Nanta Math, 1975, 8, 88–91.

3. लाल, श्याम : Bull. Cal. Math. Soc. 1997, 89, 97–104.

4. मैकफैडेन, एल. : Duke Maths. J., 1942, 9, 168–207.

5. कुरेशी, के.: Indian Jour Pure Appl. Maths., 1982, 13(8), 898–903.

6. वही : Tamkang Jour. Maths., 1981, 12 (1), 35–38.

7. कुरेशी, के. तथा नेहा, एच. के., : Ganita, 1990, 41(1), 37–42.

8. साहनी, बी. एन. तथा गोयल, डी. एस. Ranchi Univ. Math. J., 1973, 4, 50–53.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.1, January, 2000.

एक एकीकृत संपात प्रमेय

वीरेन्द्र अरोड़ा, देवेन्द्र दत्त शर्मा तथा श्याम सुन्दर प्रसाद

गणित एवं साख्यिकी विभाग, गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार (उ. प्र.)

[प्राप्त - अक्टूबर 13, 1998]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हमने 2-दूरीक समष्टियों के परिमित गुणन पर मतकोवस्की प्रकार के संकारकों के लिए एक व्यापक संपात प्रमेय स्थापित किया है। इस प्रपत्र के प्रमुख परिणाम से कई संपात एवं स्थिर बिन्दु प्रमेयें उपप्रमेयों के रूप में प्राप्त की जा सकती हैं।

Abstract

A unified coincidence theorem. *By* Virendra Arora, Devendra Dutt Sharma and Shyam Sundar Prasad, Mathematics and Statistics Department, Gurukula Kangri Vishwavidyalaya, Hardwar (U.P.).

In this paper we shall obtain a general coincidence theorem for Matkowski type operator on a finite product of 2-metric spaces. Several coincidence and fixed point theorems are obtained as special cases of our main result.

प्रस्तावना

1.1 2-दूरीक समष्टि

यूक्लिड समष्टि में तीन बिन्दुओं द्वारा निर्धारित त्रिभुज के क्षेत्रफल के गुणधर्मों की शुद्ध गणितीय व्याख्या करने वाली 2-दूरीक समष्टि की अवधारणा जर्मन गणितज्ञ प्रोफेसर एस० गहलर द्वारा शोध प्रपत्रों की एक श्रृंखला[8-12] में बीसवीं शताब्दी के सातवें दशक में प्रस्तुत की गयी।

एक अरिक्त समुच्चय X के लिए $X \times X \times X$ पर वास्तविक फलन d को 2-दूरीक कहते हैं यदि d निम्न शर्तें सन्तुष्ट करता हो :

(d – 1) दो भिन्न बिन्दुओं $x, y,$ के लिए X में तीसरे बिन्दु z का इस प्रकार अस्तित्व हो कि $d(x, y, z) \neq 0;$

(d – 2) यदि तीन बिन्दुओं x, y, z में कम से कम दो समान हों तो $d(x, y, z) = 0;$

(d – 3) $d(x, y, z) = d(y, z, x) = d(z, x, y)$ (तीनों चरों में सममिति);

(d – 4) $d(x, y, z) \leq d(x, y, w) + d(x, w, z) + d(w, y, z)$ (त्रिभुजीय असमिका);

युग्म *(X, d)* को 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है। *(d – 2)* और *(d – 4)* से स्पष्ट है कि d एक ऋणेतर फलन है।

गहलर[8] ने सिद्ध किया है कि यद्यपि 2-दूरीक d तीनों चरों (अर्थात् तीनों निर्देशकों) में किसी एक चर के सापेक्ष संतत है किन्तु यह आवश्यक नहीं कि यह दो चरों के सापेक्ष भी सतत हो। यदि यह दो निर्देशांकों के सापेक्ष संतत हो तो यह तीनों निर्देशकों के सापेक्ष भी संतत होगा।

यदि $x_j\, y_j\, z_j$ क्रमशः x, y, z के निर्देशांक हों तो दो या अधिक विमाओं के प्रत्येक यूक्लिडीयन दूरीक समष्टि पर निम्न 2-दूरीक परिभाषित होती है :

$$d(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}\right)\left[\sum_{i<j}\begin{vmatrix} x_i & x_j & 1 \\ y_i & y_j & 1 \\ z_i & z_j & 1 \end{vmatrix}^2\right]^{1/2}$$

इस प्रकार परिभाषित 2-दूरीक को यूक्लिडीयन 2-दूरीक कहा जाता है।

यदि 2-दूरीक समष्टि *(X, d)* पर एक प्रतिचित्रण T के लिए के ऋणेत्तर नियतांक $k < 1$ का इस प्रकार अस्तित्व हो कि X के प्रत्येक x, y, z के लिए

$$d(Tx, Ty, z) \leq kd(x, y, z).$$

तो T को समष्टि X पर संकुचन प्रतिचित्रण कहा जाता है। यह ज्ञात है कि पूर्ण 2-दूरीक समष्टि पर संकुचन प्रतिचित्रण एक अद्वितीय साधन रखता है अर्थात् X में एक ऐसे अद्वितीय बिन्दु z का अस्तित्व होता है कि $Tz = z$।

परिभाषा 1.1.1 समष्टि X के किसी बिन्दु x पर अनुक्रम $\{x_n\}$ अभिसरित होता है x को इस अनुक्रम की सीमा कहते हैं कि यदि X के प्रत्येक a के लिए सीमा $_n d(x_n, x, a) = 0.$

परिभाषा 1.1.2 2-दूरीक समष्टि X का एक अनुक्रम $\{x_n\}$ कोशी अनुक्रम कहा जाता है यदि X के प्रत्येक बिन्दु a के लिए

$$\text{सीमा}_{m,n}\, d(x_m, x_n, a) = 0.$$

परिभाषा 1.1.3 (X, d) को पूर्ण 2-दूरीक समष्टि कहा जाता है यदि इसमें प्रत्येक कोशी अनुक्रम एक अभिसारी अनुक्रम हो।

2-दूरीक समष्टि और इस हुए विस्तृत अनुसंधान कार्य के लिए चो[1] और सिंह-शर्मा[37] का अवलोकन करें।

1.2 मतकोवस्की संकारक

बानाख संकुचन सिद्धान्त के विभिन्न पहलुओं को ध्यान में रखते हुए युंक[18] ने 1976 में इसका विस्तार दूरीक समष्टि पर दो क्रमविनिमयी प्रतिचित्रणों हेतु किया। युंक द्वारा स्थापित स्थिर बिन्दु प्रमेय, सामान्यतया युंक संकुचन सिद्धान्त (युसंसि) के नाम से जाना जाता है। इसके अन्य व्यापकीकरणों हेतु, देखें[2], [5], [7], [20], [28], [31], [32] और[38]। बानाख संकुचन सिद्धान्त के व्याकीकरण के ध्येय से मतकोवस्की[24] - [25] ने 1973 में एक प्रतिचित्रण निकाय के लिए n-दूरीक समष्टियों के गुणन पर एक स्थिर बिन्दु प्रमेय प्राप्त किया जिसे अब मतकोवस्की संकुचन सिद्धान्त (मसंसि) कहा जाता है। इस सिद्धान्त के भी कई विस्तार और व्यापकीकरण पिछले तीन दशकों में दूरीक समष्टि पर प्राप्त किये गये जिसमें निर्देश[3] - [4], [21], [26], [29], [34], [35], [36] अवलोकनीय हैं। इसी प्रमेय का विस्तृत अध्ययन 2-दूरीक समष्टि पर भी किया गया जिसमें निर्देश[33] व [37] में किया गया कार्य निर्देश[16], [17], [30] में स्थापित परिणामों का रुचिकर विस्तारण करता है और ऊपर दिये सभी परिणाम भी स्वतः ही उन्नत हो जाते हैं।

सर्वप्रथम हम मतकोवस्की के अनुसरण पर आवश्यक संकेतों का उल्लेख कर रहे हैं, देखें निर्देश[23] [24] (साथ ही [25], [26] व[27])।

मान लें $\left(c_{ik}^{(0)}\right)$ एक वर्ग आव्यूह है, जहाँ $c_{ik}^{(0)}$, $i, k = 1, 2, \ldots n$ वास्तविक संख्याएँ हैं तो आव्यूहों $\left(c_{ik}^{(0)}\right)$ का अनुक्रम आवर्ततः इस प्रकार परिभाषित है :

$$c_{ik}^{(0)} = \begin{cases} a_{ik} & \text{जब } i \neq i,\ k = 1, 2, ..., n \\ 1 - a_{ik} & \text{जब } i = k \end{cases}$$

(1.2.1)

$$c_{ik}^{(t+1)} = \begin{cases} c_{11}^{(t)} \cdot c_{i+1,k+1}^{(t)} + c_{i+1,1}^{(t)} \quad c_{i,k+1}^{(t)} & \text{tc } i \neq k \\ c_{11}^{(t)} \quad c_{i+1,k+1}^{(t)} - c_{i+1,1}^{(t)} \quad c_{i,k+1}^{(t)} & \text{tc } i \neq k \end{cases}$$

(1.2.2)

जहाँ $i, k = 1, 2, ..., n - t - 1,\ t = 0, 1, 2, ..., n-2.$

$$\left(\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n\right) = (1, n)$$

$$\nu_{i1}, \nu_{i2}, ..., \nu_{in} = \nu_1 (1, n) \qquad (1.2.3)$$

उल्लेख है कि $\left(c_{ik}^{(t)}\right)$ एक $(n-t)\times(n-t)$ वर्ग आव्यूह है। निम्नलिखित प्रमेयिका वस्तुतः मतकोवस्की[24] द्वारा प्रदत्त है (साथ ही देखें निर्देश[13][26])।

प्रमेयिका 1.2.1 मान लें $c_{ik}^{(0)} > 0,\ i, k = 1, 2, ..., n,$ तब असमिका निकायों

$$\sum_{k=1} a_{ik}\ r_k < r_i,\ i = 1, 2, ..., n \qquad (1.2.4)$$

का एक धनात्मक साधन $r_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n$ होगा यदि और केवल यदि निम्नलिखित असमिकाएँ संतुष्ट हों।

$$c_{ii}^{(t)} > 0,\ i = 1, 2, ..., n - 1,\ n \geq 2. \qquad (1.2.5)$$

प्रमेय (1.2.1) (मतकोवस्की प्रमेय [23] – [24]). मान लें

$(x_i, d_i),\ i = 1, 2, \ldots, n$ पूर्ण दूरीक समष्टियाँ हैं तथा $T_i : X \to X_i,\ i = 1, 2, \ldots, n,$

जहाँ $X = X_1 \times X_2 \times \ldots \times X$.

यदि a_{ik}, $i, k = 1, \ldots, n$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि X_k के सभी अवयवों $x_k, y_k, k = 1, \ldots, n$ के लिए

$$d_i\left(T_i(x(1, n)), T_i(y(1, n))\right) \leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_k\left(x_k, y_k\right) \quad (1.2.6)$$

और

$$c_{ii}^{(t)} > 0, \; i = 1, \ldots, n - t, \; t = 0, \ldots, n - 1 \quad (1.2.7)$$

सन्तुष्ट हो, तब समीकरण निकाय

$$x_i = T_i(x(1, n)), \; i = 1, \ldots, n \quad (1.2.8)$$

का एक अद्वितीय साधन $x_1, x_2, \ldots, x_n$ हो गा, जहाँ$x_i \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, तथा मनमाने स्थिर $c_i^{(0)} \in X_i$, $i = 1, \ldots, n$, के लिए उत्तरोत्तर पुनरावृत्तिकों के अनुक्रमन

$$x_i^{(m+1)} = T_i\left(x^m(1, n)\right), \; m = 0, 1, \ldots, \quad (1.2.9)$$

$i = 1, \ldots n$ पर अभिसारित होते हैं और सीमा $_m\, x_i^m$, $i = 1, \ldots, n$.

उक्त प्रमेय मतकोवस्की संकुचन सिद्धान्त (**मसंसि**) के नाम से जानी जाती है (देखें, [36]) और शर्तें (1.2.7) व (1.2.8) मतकोवस्की संकुचन शर्त कही जाती हैं। उल्लेख है कि मसंसि में $n = 1$ रखने पर बासंसि प्राप्त हो जाता है। सामान्यतया (देखें, 29) यदि $T = (T_1, T_2, \ldots, T_n)$ परिभाषित करें तब T को मतकोवस्की संकारक कहा जाता है। यदि $n > 1$ तब संकारक T अविस्तारी हो सकता है। ऐसे संकारक जो अविस्तारी नहीं हैं, मतकोवस्की संकारक भी हो सकते हैं (देखें, [29])। जरविक[4] ने बहुमानी प्रतिचित्रण निकायों के लिए मसंसि का व्यापकीकरण एवं विस्तारण किया जो अन्य परिणामों के साथ बहुमानी प्रतिचित्रणों के लिए नाडलर[27] के संकुचन सिद्धान्त को भी अंतर्निहित करता है। मतकोवस्की उपपत्ति तकनीक[23] का अनुसरण करते हुए जरविक[31] एवं रेड्डी-सुब्रमन्यन[29] ने क्रमशः एडेलस्टिन[6] और क्रासनोसेलस्की[22] के स्थिर बिन्दु प्रमेयों को दो प्रतिचित्रण निकायों के लिए सिद्ध किया। उल्लेख है कि मतकोवस्की प्रकार के स्थिर बिन्दु प्रमेय फलनक समीकरणों के निकायों के अवमुख साधन की प्राप्ति हेतु उपयोगी हैं। इस प्रपत्र में चार प्रतिचित्रण निकायों हेतु एक संपात प्रमेय स्थापित की गयी है, जो मतकोवस्की[23], [24], सिंह-गैरोला[34] तथा सिंह-शर्मा[37] के परिणामों को एकीकृत एवं व्यापकीकृत करती है।

2. मुख्य परिणाम

मान लें $A_1, A_2, \ldots, A_n$ मनमाने अरिक्त समुच्चय हैं। यदि $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ एवं

$X_1, \ldots\ldots X_n$ क्रमशः d_i, $i = 1, \ldots, n$ के साथ 2-दूरीक समष्टियाँ हैं और प्रत्येक d_i, $i = 1, \ldots\ldots, n$ संतत भी है। तब यह मान लें कि

P_i, Q_i, S_i एवं T_i प्रतिचित्रण A पर परिभाषित हैं एवं X_i, $i = 1, \ldots, n$ में मान रखते हैं

(2.1)

$P_i(A) \cup Q_i(A) \subset S_i(A) \cap T_i(A)$ एवं $S_i(A) \cap T_i(A)$, X_i, $i = 1, \ldots, n$ की पूर्ण उपसमष्टियाँ हैं। (2.2)

$$\begin{aligned}
d_i\Big(P_i(x(1, n)), Q_i(y(1, n)), p_i\Big) &\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_k\Big(S_i(x(1, n)), T_k(y(1, n)), p_k\Big) \\
&+ b\Big[d_i\Big(S_i(x(1, n)), P_i(x(1, n)), p_i\Big) \\
&+ d_i\Big(T_i(y(1, n)), d_i(Q_i(y(1, n)), p_i\Big)\Big] \\
&+ c\Big[d_i\Big(S_i(x(1, n)), Q_i(y(1, n)), p_i\Big) \\
&+ d_i\Big(T_i(y(1, n)), P_i(x(1, n)), p_i\Big)\Big] \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

जहाँ $(x(1, n), y(1, n), p_i) \in A \times A \times X_i$ तथा b एवं c ऋणेत्तर संख्याएँ हैं।

अब हम मुख्य परिणाम सिद्ध करेंगे-

प्रमेय 2.1. यदि ऋणेत्तर संख्याओं b, c व a_{ik}, $i, k = 1, \ldots\ldots, n$ का अस्तित्व इस प्रकार हो कि शर्त (1.2.1) – (1.2.5) व (2.1) – (2.3) संतुष्ट हों,

जहाँ पर $0 \leq 2b + 2c \leq 1 - h$

जिसमें

$$h = \underset{i}{\text{अधिकतम}} \left\{ r_i^{-1} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, r_k \right\} \qquad (2.4)$$

तब समीकरण निकायों

$$P_i(x(1,n)) = S_i(x(1,n)) \tag{2.5a}$$

$$Q_i(y(1,n)) = T_i(y(1,n)),\ i = 1, \ldots\ldots, n \text{ के } A \text{ में साधन होंगे।} \tag{2.5b}$$

उपपत्ति : सुज्ञात है कि असमिका (1.2.4) को देखते हुए (2.4) में पारिभाषित $h \in (0, 1)$ (देखें, जेरविक[3]) का अस्तित्व ऐसा प्राप्त होता है कि प्रमेयिका 1.2.1 एवं (1.2.5) से धनात्मक संख्याओं $r_1, r_2, \ldots\ldots, r_n$ के लिए

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, r_k < h\, r_i,\ i = 1, 2, \ldots, n$$

Ai में $x_i^{(0)}$, $i = 1, \ldots\ldots, n$ लें (2.2) को देखते हुए A_i में $\{x_i^m\}$एवं $S_i(A) \cap T_i(A)$ में $\{z_i^m\}$ अनुक्रमों की रचना इस तरह करें कि

$$P_i\left(x^{2m}(1,n)\right) + T_i\left(x^{2m+1}(1,n)\right) = z_i^{2m+1}$$

तथा

$$Q_i\left(x^{2m+1}(1,n)\right) = S_i\left(x^{2m+2}(1,n)\right) = z_i^{2m+2},\ m = 1, 1, 2, \ldots\ldots,$$

हम मान सकते हैं कि

$$d_i\left(z_i^1, z_i^2, p_i\right) \le r_i,\ r_i \ge 0, i = 1, 2, \ldots, n.$$

(2.3) से

$$d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i\right) = d_i\left(P_i(x^2(1, n)), Q_i(x^1(1, n)), p_i\right) \tag{2.6}$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\left(z_k^1, z_k^2, p_k\right) + b\left[d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i\right)\right.$$

$$\left. + d_i\left(z_i^1, z_i^2, p\right)\right] + c\left[d_i\left(z_i^2, z_i^2, p_i\right) + d_i\left(z_i^1, z_i^3, p_i\right)\right]$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_{ik} r_k + b\left[d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i \right) + r_i \right]$$

$$+ c\left[r_i + d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i \right) + d_i\left(z_i^1, z_i^2, z_i^3 \right) \right] \qquad (2.7)$$

अब यदि $d_i\left(z_i^1, z_i^2, z_i^3 \right) > 0$, तब समीकरण (2.6) में $p_i = z_i^1$ रखने पर

$$d_i\left(z_i^2, z_i^3, z_i^1 \right) \leq (b + 0)\, d_i\left(z_i^2, z_i^3, z_i^1 \right)$$

$$(1 - b)\, d_i\left(z_i^2, z_i^3, z_i^1 \right) \leq 0, \; i = 1, \ldots, n.$$

अर्थात् $d_i\left(z_i^1, z_i^2, z_i^3 \right) = 0$

अतः समीकरण (2.7) से

$$d_i\left(z_i^2, z_i^3, p_i \right) \leq q r_i \; tgka \; q = (h + b - c)/(1 - b - c), i = 1, \ldots, n.$$

इसी तरह

$$d_i\left(z_i^3, z_i^4, p_i \right) \leq q^2 r_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

आगमनतः

$$d_i\left(z_i^{m+1}, z_i^{m+2}, p_i \right) \leq q^m r_i, \; m = 1, 2, \ldots .$$

अतः $\left\{ z_i^m \right\}$ एक कोशी अनुक्रम है, जिसकी $S_i(A) \cap T_i(A)$ $i = 1, \ldots, n$ में सीमा होगी इसे u_i, $i = 1, \ldots, n$ कहें।

अब मान लें $S_i^{-1} u_i$ में एक बिन्दु $v_i(1, n)$ इस तरह हो कि

$$S_i(v_i(1, n)) = u_i, \; i = 1, \ldots, n.$$

अब (2.3) से

$$d_i\left(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), p_i \right)$$

$$\leq d_i\left(S_i(v_i(1, n)), Q_i(x^{2m+1}(1, n)), P_i \right)$$

$$+ d_i\left(Q_i(x^{2m+1}(1, n)), P_i(v_i(1, n)), P_i \right)$$

$$+ d_i\left(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), Q_i(x^{2m+1}(1, n)) \right)$$

$$\leq d_i\left(S_i(v_i(1, n)), Q_i(x^{2m+1}(1, n)), p_i \right)$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_k\, d_i\left(S_k(v_i(1, n)), z_k^{2m+1}, p_k \right)$$

$$+ b\left[d_i\left(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), p_i \right) + d_i\left(z_i^{2m+1}, z_i^{2m+2}, p_i \right)\right]$$

$$+ c\left[d_i\left(S_i(v_i(1, n)), (z^{2m+2}, p_i \right) + d_i\left(z_i^{2m+1}, P_i(v_i(1, n)), p_i \right)\right]$$

$$+ d_i\left(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), z_i^{2m+2} \right)$$

$$= d_i\left(S_i(v_i(1, n)), z^{2m+2} p_i \right) + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, d_k\left(S_k(v_i(1, n)), z_k^{2m+1}, p_k \right)$$

$$+ b\left[d_i\left(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), p_i \right) + d_i\left(z_i^{2m+1}, z_i^{2m+2}, p_i \right)\right]$$

$$+ c\left[d_i\left(S_i(v_i(1, n)), (z^{2m+2}, p_i \right) + d_i\left(z_i^{2m+1}, P_i(v_i(1, n)), p_i \right)\right.$$

$$\left. + d_i\left(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), u_i \right)\right]$$

$$+ d_i\left(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), z_i^{2m+2} \right)$$

क्योंकि $d_i\Big(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), u_i) = 0 \Big)$

$m \to \infty$ लेने पर

$$d_i\Big(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), p_i \Big)$$

$$\leq (b + c)\, d_i\Big(S_i(v_i(1, n)), P_i(v_i(1, n)), p_i \Big)$$

जिससे

$$S_i(v_i(1, n)) = P_i(v_i(1, n))$$

प्राप्त होता है।

इसी प्रकार $T_i^{-1} u_i$ में $w_i(1, n)$ बिन्दु का अस्तित्व इस प्रकार मिलता है कि

$$T_i\Big(w_i(1, n) \Big) = Q_i\Big(w_i(1, n) \Big),\ i = 1, \dots, n.$$

उपपत्ति पूर्ण हुई।

टिप्पणियाँ

1. यदि उक्त प्रमेय में $b = c = 0$, $A_i = X_i$, $P_i = Q_i$ और $T_i(x(1, n)) = S_i(x, (1, n)) = x_i$ (जहाँ प्रत्येक x_i समुच्चय A_i, $i = 1, \ldots, n$ का अवयव है) लेने पर मतकोवस्की प्रमेय (देखें प्रमेय1.2.1) का 2-दूरीक परिवर्त प्राप्त हो जाता है।

2. जब $b = c = 0$, $P_i = Q_i$ और $S_i = T_i$, $i = 1, \dots, n$ हो तब उक्त प्रमेय से तकामिनेक[21] द्वारा व्यापकीकृत गोबेल[14] 'संपात प्रमेय का 2-दूरीक परिवर्त तनिक भिन्न रूप में प्राप्त किया जा सकता है।

3. P_i व T_i की अतिरिक्त क्रमविनिमेयता की शर्त के साथ यदि उक्त प्रमेय में $b = c = 0$ एवं $A_i = X_i$, $P_i = Q_i$, $S_i = T_i$, $i = 1$ लें तब युंक संकुचन सिद्धान्त[18] प्राप्त किया जा सकता है।

4. $A_i = X_i$; $c = 0$, $S_i(x(1, n)) = x_i = T_i(x(1, n)) = x_i$ (जहाँ प्रत्येक $x_i \in A_i$) लें तो सिंह-कुलश्रेष्ठ[37] के परिणाम का उन्नत रूप प्राप्त किया जा सकता है।

5. $S_i(x(1, n)) = T_i(x(1, n)) = x_i$ (जहाँ प्रत्येक $x_i \in A_i$) लिया जाय तब सिंह-शर्मा[37] का परिणाम प्राप्त होता है जो आईसेकी[15], आईसेकी-शर्मा-शर्मा[17] और सिंह-कुलश्रेष्ठ[36] के परिणामों को उन्नत एवं एकीकृत करता है।

निर्देश

1. चो. वाई. जे. Linear Mappings on 2-Normed Spaces, D. Phil. Thesis, Pusan National University, Korea, 1984.
2. कोसरवा, वी., Publ. Inst. Math. (Beograd) 1982, 32, 37-43.
3. जेरविक, एस., Demonst. Math. 1976, 9, 281-285.
4. वही, Proc. Amer. Math. Soc. 1976, 55, 136-139.
5. दास, के. एम. तथा नायक, के., Proc. Amer. Math. Soc. 1979, 77, 369-373.
6. एडलस्टिन, एम., J. London Math. Soc. 1962, 37, 74-79.
7. फिशर बी., Math, Sem. Notes, Kobe Univ. 1979, 7, 81-84, *Addendum* 1980, 8, 513-514.
8. गहलर एस., Math. Nachr. 1963, 26, 115-148.
9. वही, Math. Nachr. 1964, 29, 301-331.
10. वही, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 1965, 82, 387-395.
11. वही, Math. Nachr., 1965, 25, 235-244.
12. वही, Revue Roumaine de Mathem. Pures of Appliquees, 1966, XI, 665-667.
13. गैरोला, यू. सी., सिंह, एस. एल. तथा व्हीटफिल्ड, जे. एच., Demonst. Math. 1995, XXVIII, 541-548.
14. गोबेल, के., Bull Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 1968, 16, 733-735.
15. आईसेकी, के., Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 1975, 3, 133-136.
16. वही, Math. Sem. Notes, Kobe Univ. 1975, 3, 125-129.
17. आईसेकी, के., शर्मा, पी. एल. तथा शर्मा, बी. के., Math, Jahon. 1976, 21, 67-70.
18. युंक जी., Amer, Math. Monthly, 1976, 83, 261-263.
19. वही, Internet. J. Math. Math. Sci. 1986, 9, 771-77.
20. वही, Proc. Amer. Math. Soc. 1988, 103, 77-983.
21. कोमिनेक, जेड. Univ. Slaskiw Katowicach Prace-Nauk-Prace. Math. 1982, 12, 30-33.
22. क्रासनोसेल्सकी, एम. ए., Uspchi Mat. Nauk 1985, 10, 123-127.
23. मतकोवस्की, जे., Bull. Acad. Polon, Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 1973, 21, 323-324.

24. वही, Dissertationes Mat. CXXVII (Rozprawy), Warszawa, 1975.

25. वही, Proc. Amer. Math. Soc. 1977, 62, 344-348.

26. मतकोवस्की, जे. तथा सिंह, एस. एल., Indian J. Math 1996, 38, 73-80.

27. नाडलर, एस. बी., जू०, Pacific J. Math. 1969, 30, 475-488.

28. पार्क, एस., Rocky Mountain J. Math. 1978, 8, 743-750.

29. रेड्डी, के. बी. तथा सुब्रमण्यम, पी. वी., Funcial. Ekv. 1981, 24, 67-83.

30. रोडेजे, बी. ई., Math. Nachr, 1979, 91, 151-155.

31. सेसा, एस., Pull. Inst. Math. (Beogard) 1982, 32, 149-153.

32. सेसा, एस. तथा फिशर, बी., J. Math. Phys. Sci., 1984, 18, 353-360.

33. शर्मा, देवेन्द्र दत्त, शोध प्रबंध गुरुकुल कांगड़ी विश्वविद्यालय, हरिद्वार, 1991

34. सिंह, एस. एल. तथा गैरोला, यू. सी. Demonst. Math. 1990, 23.

35. सिंह, एस. एन., गैरोला, यू. सी. तथा मेंहदीरत्ता, आर., J. Indian Math. Soc. 1991, 56, 65-70.

36. सिंह, एस. एल. तथा कुलश्रेष्ठ, सी., Pusan Kyongnam, Math. J. (1986), 2 1-8.

37. सिंह, श्यामलाल तथा शर्मा, देवेन्द्र दत्त, 2-दूरीक एवं 2-मानकित समष्टियों में संपात एवं स्थिर बिन्दु समीकरणों के साधन, वैज्ञानिक तथा तकनीकी शव्दावली आयोग, मानव संसाधन, विकास मंत्रालय (शिक्षा विभाग) भारत सरकार द्वारा अगस्त 1997 में प्रकाशन हेतु स्वीकृत रिसर्च मोनोग्राफ।

38. तिवारी, बी. एम. एल. तथा सिंह, एस. एल., J. U. P. Govt. College 1986, 3, 13-18.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.1, January, 2000.

सार्वीकृत H-फलन परिवर्त से संबद्ध प्रमेय

ए. के. रोंघे

गणित विभाग, एस. एस. एल. जैन स्नातकोत्तर महाविद्यालय, विदिशा

[प्राप्त – सितम्बर 12, 1999]

सारांश

प्रस्तुत शोध प्रपत्र का उदेश्य सार्वीकृत H-फलन परिवर्त एवं मेलिन परिवर्त वाले छः प्रमेयों की स्थापना करना है। इन प्रमेयों द्वारा सार्वीकृत H-फलन एवं मेलिन परिवर्त को विभिन्न कार्यकर्ताओं द्वारा प्राप्त परिवर्तों से स्थानान्तरित करके कई रोचक विशिष्ट दशाएँ प्राप्त की जा सकती हैं। किन्तु यहाँ हम प्रमेयों द्वारा प्राप्त नवीन समाकलन ही प्रस्तुत करेंगे।

Abstract

Theorems on generalized *H*-function's transform. *By* A. K. Ronghe, Department of Mathematics, S. S. L. Jain P. G. College, Vidisha (M. P.).

The object of the present paper is to establish six theorems connecting generalised *H*-function involving Mellin transforms. Many interesting particular cases can be obtained, however, we have evaluated here only some new integrals.

1. प्रस्तावना

सक्सेना का सार्वीकृत H-फलन[1] जो कि I-फलन द्वारा जाना जाता है जिसके गुणधर्मों का अध्ययन वैश्य, जैन तथा वर्मा[4] एवं रोंघे[3] के शोधपत्रों में किया गया है, उस फलन को निम्न प्रकार से प्रस्तुत कर रहे हैं।

$$I[z] = I^{m,\, l}_{p_i,\, q_i : r}\left[Z \left| \begin{matrix} \Phi_1, & \Phi_2 \\ \Phi_3, & \Phi_4 \end{matrix} \right. \right] = \frac{1}{2\pi w} \int_{-\infty\omega}^{+\infty\omega} \theta(s)\, z^s\, ds \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\Phi_1 \equiv \left[\left(a_j , \alpha_j \right), l \right],$$

$$\Phi_2 \equiv \left[\left(a_{ji} , \alpha_{ji} \right)_{l+1} \cdot p_i \right]$$

$$\Phi_3 \equiv \left[\left(b_j , \beta_{ji} \right)_{1 . m} \right],$$

$$\Phi_4 \equiv \left[\left(b_j \ \beta_{ji} \right)_{m+1} , q_i \right]$$

इन प्राचलों के समुच्चयों का प्रयोग पूरे प्रपत्र में होगा, और $\omega = \sqrt{-1}$.

तथा

$$\theta(s) = \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j - B_j . s) \prod_{j=1}^{l} \Gamma(1 - a_j + \alpha_j s)}{\sum_{i=1}^{r} \left[\prod_{j=M+1}^{q_i} \Gamma(1 - b_{ji} + \beta_{ji} \ s) \prod_{j=l+1}^{p_i} \Gamma(a_{ji} - \alpha_{ji} s) \right]}, \tag{1.2}$$

समाकलन (1.1) पूर्ण अभिसारी होता है जब $| arg (z) | < \frac{1}{2} B_i \pi, (B_i > 0, \ A_i \leq 0),$

जहाँ

$$B_i = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j - \sum_{j=l+1}^{p_i} \alpha_{ji} + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m_i+1}^{q_i} \beta_{ji}, \tag{1.3}$$

$$A = \sum_{j=1}^{p_i} \alpha_{ji} - \sum_{j=1}^{q_i} \beta_{ji}, \forall i \, \varepsilon \, (1, \ldots , r) \tag{1.4}$$

अधिक जानकारी के लिये देखें[2]।

जब $r = 1$, तो सार्वीकृत H-फलन फाक्स H-फलन[1] में रूपान्तरित हो जाता है जिसे माइजर G-फलन, गॉस F-फलन इत्यादि फलनों में बदला जा सकता है जिनको हम विशिष्ट दशाओं में दर्शायेंगे।

2. इस अनुभाग में I-फलन युक्त मेलिन रूपान्तरण के छः प्रमेयों को स्थापित करेंगे।

प्रमेय-प्रथम

$$M\left\{(1-x)^{\gamma}(1+\alpha x)^{\mu}x^{s-1}I_R\left[Zx^{y}(1-x)^{\omega}\right]\right\}$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}\frac{(-1)^K}{K!}\frac{\Gamma(1+\mu}{\Gamma(1+\mu-K}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\alpha^n}{n!}I^{m,\,l+3}_{p_i+3,\,q+2}\left[Z\left|\begin{matrix}a_1\\B_1\end{matrix}\right.\right] \quad (2.1)$$

A_1 और B_1 प्राचलों का समुच्चय है तथा (2.1) निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है।

$$A_1\equiv\left[(1-s-n:y),\,(-\gamma-\mu:\omega),\,(-\gamma,\,\omega,\,\Phi_1,\,\Phi_2\right],$$

$$B_1\equiv\left[\Phi_3,\,\Phi_4,\,(-n-\mu-\gamma:\omega)\,(-s-\gamma:\omega+y)\right].$$

$$y,\gamma,\,\omega>0\ \mathrm{Re}\left[S+y\,(b_{ji}/\alpha_{ji}\right]>0,\,\mathrm{Re}\left[\gamma+\omega\left(b_{ji}/\alpha_{ji}\right)\right]>0$$

$$j=1,\ldots..m,\ \theta>0,\ |\arg Z|<\frac{1}{2}B_i\pi_1,\ i\varepsilon\ (1,\ldots,r)$$

प्रमेय-द्वितीय

$$M\left\{(1-x)^{\gamma}(1+\alpha x)^{\mu}x^{s-1}\ R\left[Z((1-x)/x)^{\mu'}\right]\right\}$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^K}{K!}\frac{(-1)^n\alpha^n}{n!}\frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\mu-K)}I^{m+1,\,l+2}_{p_i+2,\,q_1+2}\left[Z\left|\begin{matrix}A_2\\B_2\end{matrix}\right.\right] \quad (2.2)$$

A_2 और B_2 प्राचलों का समुच्चय है तथा (2.2) निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है।

$$A_2 \equiv \left[(-\gamma : \mu'), \ (-\mu - \gamma : \mu') \ \Phi_1, (n + s : \mu') \ \Phi_2 \right]$$

$$B_2 \equiv \left[(-\gamma - n - \mu : \mu') \ \Phi_3 \, , \ \Phi_4 \right]$$

$$\gamma \, , \ \mu \mu' > 0 \, , \quad \mathrm{Re} \left[S + \mu' \left(b_{J\,i} - 1 \right) / \alpha_{j\,i} \right] > 0,$$

$$\mathrm{Re} \ (\gamma + \mu' \left(b_{j\,i} / \alpha_{j\,i} \right) \Big] > 0 \, , \ j = 1 \, , \ .... \ m, \ | \, arg \ Z \, | < \frac{1}{2} \ B_i \ \pi,$$

$$i \ \varepsilon \ (1 \, , ..., r) \quad j = (1 \, , ..., m) \quad \theta > 0,$$

प्रमेय तृतीय

$$M \left\{ (1 - x)^{\gamma} \ (1 + \alpha \, x)^{\mu} \ x^{S-1} \ I_R \left[Z x^{\sigma} \ (1 + \alpha \, x)^{\delta} \right] \right\}$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \ \sum_{n=0}^{\infty} \ \frac{(-1)^k}{K!} \ \frac{(-1)^n}{n!} \ \frac{\Gamma(1 + \gamma)}{\alpha^{-n}} \ I^{m, \ l+3}_{p_i + 3, \ q_i + 3} \left[Z \ \middle| \ \begin{matrix} A_3 \\ B_3 \end{matrix} \right]$$

(2.3)

A_3 और B_3 प्राचलों आ समुच्चय है तथा (2.3) निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है।

$$A_3 \equiv \left[(-\mu : \delta) \, , \ (1 - \delta - n : \sigma) \, , \ (-\gamma - \mu : \delta) \, , \ \Phi_1 \, , \ \Phi_2 \right]$$

$$B_3 = \left[\Phi_3, \ \Phi_4 \, , \ (-\mu + K : \delta) \ (-n - \gamma - \mu : \delta) \ \ (-\gamma - \delta : \delta) \right]$$

$$\sigma \, . \, \delta \, , \gamma \, , \mu > 0, \ \mathrm{Re} \left[S + \sigma \left(b_{j\,i} / \alpha_{j\,i} \right) \right] > 0 \ \ \mathrm{Re} \left[\mu + \delta \left(b_{j\,i} / \alpha_{j\,i} \right) > 0, \right.$$

$$j = \{ 1- , \, ... \, m, \} m \ | \, arg \ Z \, | < \frac{1}{2} B_i \pi \, , \quad i \ \varepsilon \ (1, 2 \, ... \, r)$$

प्रमेय-चतुर्थ

$$M\left\{(1-x)^{\gamma}\,(1+\alpha x)^{\mu}\,x^{S-1}\,I_R\left[Z\,(x/1+\alpha x)^{\sigma}\quad\right]\right\}$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^K}{K!}\;\frac{(-1)^n\,\alpha^n}{n!}\;\Gamma\,(1+\gamma)\;\;I^{m+2\,;\,l+1}_{p_i+1\,;\,q_i+3}\left[Z\;\middle|\;\begin{matrix}A_4\\B_4\end{matrix}\right] \tag{2.4}$$

A_4 और B_4 प्राचलों का समुच्चय है तथा (2.4) निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है।

$$A_4\equiv\left[(1-n-S:\sigma)\,,\;\Phi_1\,,\;\Phi_2\,,\;(1+\mu:\sigma)\,,\;(1+\gamma+\mu:\sigma)\right]$$

$$B_4\equiv\left[(1-K+\;\mu\,,\sigma)\;(1+n+s+\mu:\partial)\;\Phi_3\,,\;\Phi_4\;(-\gamma-S:\sigma)\right]$$

$$\gamma\,,\;\mu,\,\sigma>0\,,\;\mathrm{Re}\left[\,s+\sigma\left(b_{ji}/\alpha_{ji}\right)\right]>0,$$

$$\mathrm{Re}\left[\,\mu\;-\;\sigma\;\left(1-b_{ji}/\alpha_{ji}\right)\right]>0,$$

$$|\;arg\;\;Z|\;<\frac{1}{2}\;B_i\;\pi$$

$$j=1\,,\;......\,m\,,\quad i\,\varepsilon\;(1\,,\,........\,r)$$

प्रमेय-पंचम

$$M\left\{\;(1-x)^{\gamma}\,(1+\alpha x)^{-\mu}\;{}_x s-1\;I_R\left[\;(\,1+\alpha x)\,/x\,)^{\,\sigma}\quad Z\right]\right\}$$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}\;\sum_{n=0}^{\infty}\;\frac{(-1)^K}{K!}\;\;\frac{(-1)^n}{n!}\;\;\alpha^n\;\;\Gamma\,(1+\gamma)\;\;I^{m+1,\,l+2}_{p_i+3,\,q_i+3}\left[\;Z\;\middle|\;\begin{matrix}A_5\\B_5\end{matrix}\right] \tag{2.5}$$

जहाँ

$$A_5 \equiv \left[(-\mu:\sigma),\ (-\gamma-\mu:\sigma)\ \Phi_1,\ \Phi_2\ \ (n+s:\sigma) \right]$$

$$B_5 \equiv \left[(1+\gamma+s:\sigma),\ \Phi_3,\ \Phi_4\ (K-\mu:\sigma)\ (-n-\gamma-\mu:\sigma) \right]$$

(2.5) निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है।

$$\gamma,\ \mu,\ \partial > 0.$$

$$\text{Re}\left[S-\sigma\ (b_{ji}-1)/\alpha_{ji}\ (\right] > 0,\quad \text{Re}\left[\mu+\sigma\left(b_{ji} \right)/\alpha_{ji} \right] > 0$$

$$|\arg Z| < \frac{1}{2} B_i\ \pi,\quad j=1,\ldots.m,\quad i\ \in\ \{1\ldots.\ r\}$$

प्रमेय-षष्ठम

$$M\left\{ (1-x)^{\gamma}\ (1+\alpha x)^{\mu}\ x^{S-1}\ I_R\left[(Zx^{\mu'})/(1-x)^{\mu'} \right] \right\}$$

$$= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^K}{K!}\ \frac{(-1)^n}{n!}\ \frac{\Gamma(1+\mu)}{\Gamma(1+\mu-K)\ \Gamma(1+\gamma+S)} \times$$

$$I^{m+1,\,l+2}_{p_i+3,\,q_i+3}\left[Z \left| \begin{matrix} (1+\gamma:\mu),\ (1+\mu+\gamma:\mu')\,\Phi_1\ \ \Phi_2\ (-n-S:\mu') \\ (1+n+\mu+\gamma:\mu')\ \Phi_3,\ \Phi_4 \end{matrix} \right. \right] \tag{2.6}$$

परिणाम (2.6) निम्न प्रतिबंधों के अन्तर्गत वैध है।

$$\gamma,\ \mu,\ > 0,$$

$$\text{Re}\left[S+\mu'\left(b_{ji}/\alpha_{ji} \right) \right] > 0,\quad \text{Re}\left[\chi-\mu\ \left(b_{ji}-1 \right)/\ \alpha_j \right] > 0,$$

$$|\arg Z| < \frac{1}{2} B_i\ \pi,\quad j = \{1,\ \ldots..m\},\ \ i\ \varepsilon\ (1,\ldots\ldots r)$$

उपपत्ति : प्रमेय (2.1) को सिद्ध करने के लिये हम वाम पक्ष को $g(s)$ द्वारा अंकित करते हैं। सार्वीकृत H-फलन (1.1) की सहायता से एवं मेलिन परिवर्त के सहयोग से तथा समाकलन क्रम को बदलते हुए, यह मानकर कि प्रक्रिया में सन्निहित पूर्णतया अभिसारी है, निम्न सम्बंध प्राप्त होता है।

$$g(s) = \frac{1}{2\pi\omega}\int_{-\infty\omega}^{+\infty\omega} \theta(s)\int_0^{\infty}(1-x)^{\gamma+\omega s}(1+\alpha x)^{\mu}\, x^{s+\gamma s-1}\, dx\, ds$$

अब स्नेडान [5, p.257] की सहायता से आन्तरिक समाकलन का मान रखने तथा परिणाम की विवेचना के लिए (1.1) की सहायता लेने पर हमें (2.1) के दायें पक्ष की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार शेष प्रमेयों को सिद्ध किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

(i) सभी प्रमेयों में यदि $r = 1$ रखें तो ये फाक्स[1] H-फलन में परिवर्तित हो जायेंगे।

(ii) पुनः यदि सभी प्रमेयों में $r=1, \alpha_i=\beta_\gamma=c\ (i=1,....p_i j=1 .... q)$ रखें तो माइजर G-फलन में परिवर्तित हो जायेंगे।

(iii) इसी प्रकार इनके प्राचलों के अतिविशिष्टीकरण से E-फलन (मैकरोबेर्ट) में बदला जा सकता है।

निर्देश

1. फाक्स, सी. : ट्रांजै अमे. मैथ. सोसा., 1961, 98, 395–429.
2. सक्सेना, बी. पी. : प्रोसी. नेश. एके. सांइस. इंडिया, 1982, 52A, 366–375.
3. रोंघे, ए. के. : पी-एच. डी. थीसिस. बरकतउल्ला विश्वविद्यालय, भोपाल (1993).
4. वैश्य, सी. डी., जैन, रेनू तथा वर्मा, आर. सी. : प्रोसी. नेश. एक. साइंस. इंडिया, 1989, 52A, 366–375.
5. स्नेडान, आई. एन. : The Use of Integral Transform. MacGraw Hill, NewYork, 1972

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 100 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 25 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854 640405

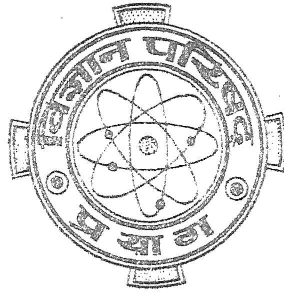
ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 43	April 2000	No. 2



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 43 April 2000 No. 2

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.2, April, 2000.

मेथिलग्लायोक्सल की उपस्थित में निमज्जित किण्वन द्वारा लैक्टिक अम्ल का उत्पादन

शशिकान्त कुमार, डी० सी० मंडल तथा एस० पी० सिंह

रसायन विभाग, मगध विश्वविद्यालय, बोध गया (बिहार)

[प्राप्त—अगस्त 29, 1999]

सारांश

यह पाया गया कि मेथिल ग्लायोक्सल की उपस्थिति में *L. delbrueckii* S-25 द्वारा लैक्टिक अम्ल की उपलब्धि में उल्लेखनीय ह्रास होता है।

Abstract

Production of lactic acid by submerged fermentation of exposed methyl glyoxal. *By* Shashikant Kumar, D. C. Mandal and S. P. Singh, Department of Chemistry, Magadh University, Bodh-Gaya (Bihar).

The effect of methyl glyoxal (MG) on submerged lactic acid fermentation by *Lactobacillus delbrueckii* S-25 is reported. It has been found that methyl glyoxal produced marked and sustained reduction in the yield of lactic acid of *L. delbrueckii* S-25.

इसके पूर्व यह सूचित किया जा चुका है[1-3] कि फेनिल ग्लायोवसल सूक्ष्मजीवों में अंकुरण, वृद्धि तथा स्पोर निर्माण को अवरुद्ध करता है। अतः यह सोचा गया कि यदि इसके फेनिल समूह को मेथिल समूह द्वारा प्रतिस्थापित कर दिया जाय तो इस प्रकार से प्राप्त होने वाला मेथिल ग्लायोक्सल आसानी से पायरुविक अम्ल में विघटित हो जावेगा। मेथिल ग्लायोक्सल के प्रभाव का अध्ययन कतिपय नाइट्रोजन स्वांगीकरण के एंजाइमों[4, 5] के साथ किया गया क्योंकि ये एंजाइम स्पोर-अंकुरण में महत्वपूर्ण

भूमिका निभाते हैं। इस अध्ययन में मेथिल ग्लायोक्सल का उपयोग इस दृष्टि से किया गया कि यदि यह स्पोर-अंकुरण को निरुद्ध करता है तो यह दूध तथा दूध-उत्पादों के उत्तम संरक्षी सिद्ध हो सकता है। इस प्रकार हमने निमज्जित लैक्टिक अम्ल किण्वन पर मेथिल ग्लायोक्सल के प्रतिरोधी प्रभाव से प्राप्त परिणाम सूचित कर रहे हैं।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त मेथिल ग्लायोक्सल सिग्मा कम्पनी से मँगाया गया था।

माध्यम : 100 मिली आयतन के माध्यम का संघटन निम्नवत् था

शीरा	...	20%(w/v)
माल्ट निष्कर्ष	...	0.38%
$(NH_4)_2HPO_4$	...	0.25 %
$CaCO_3$	...	6%
pH	...	6.2 फास्फेट बफर विलयन द्वारा समंजित
निर्जलीकरण	...	15 पौंड वाष्प दाब पर 25-30 मिनट तक

प्रयुक्त जीवाणु : *Lactobacillus delbrueckii* S-25 प्रजाति को लैक्टोज पेप्टोन ऐगार स्लाण्ट में रख कर एक रेफ्रिजरेटर में संचित किया गया।

इनाकुलम की आयु	:	45 घंटे पुरानी
इनाकुलम की मात्रा	:	*L. delbrueckii* S-25 का 0.05 मिली० बैक्टीरियल स्ट्रेन
इनक्यूबेशन अवधि	:	72, 144 तथा 192 घंटे
इष्टतम इनक्यूबेशन अवधि	:	144 घंटे

L. delbrueckii S-25 स्ट्रेन को पलिघों में रखे 1100 मिली संवर्ध माध्यम में इनाकुलेट किया गया और इस इन पालिघों को 45° से० पर 48 घंटे तक इनक्युबेट किया। तत्पश्चात् पी-एच को 6.2 पर स्थिर रखा गया जिसके लिए फास्फेट बफर की आवश्यक मात्रा मिलाई गई।

परीक्षण विधियाँ

निमज्जित किण्वन के अन्तर्गत उत्पन्न हुई हुए लैक्टिक अम्ल तथा अकिण्वित शीरे की मात्रा का निश्चयन बार्कर इत्यादि[7] तथा डुबॉस की[8] रंगमापी विधियों द्वारा किया गया।

सारणी : *L. delbrueckii* S-25 द्वारा निमज्ञित लैक्टिक अम्ल किण्वन जिसमें मेथिल ग्लायोवसल मिला हुआ था।

प्रयुक्त यौगिक	यौगिक की सान्द्रता (M/1000)	लैक्ट्रिक अम्ल की लब्धि g/100 ml.					अकिण्वित बचा हुआ शीरा	144 घंटे बाद लैक्ट्रिक अम्ल में 1% की ह्रास
		72h	144h	192h;	72h	144h	192h	–
नियन्त्रण (–MG) +MG	–	4.368	5.284	4.783	2.361	1.438	1.422	–
	1.0×10^{-5} M**	–	5.272***	–	–	1.451	–	(–) 0.2271
	2.0×10^{-5} M	–	4.253	–	–	2.470	–	(–) 19.5117
	3.0×10^{-5} M	–	3.178	–	–	3.545	–	(–) 39.8561
	4.0×10^{-5} M	–	3.065	–	–	3.658	–	(–) 41.9947
	5.0×10^{-5} M	–	2.175	–	–	4.549	–	(–) 58.8380
	6.0×10^{-5} M	–	2.003	–	–	4.722	–	(–) 62.093
	7.0×10^{-5} M	–	0.118	–	–	6.602	–	(–) 97.7668
	8.0×10^{-5} M	–	****	–	–	–	–	–
	9.0×10^{-5} M	–	****	–	–	–	–	–
	10.0×10^{-5} M	–	****	–	–	–	–	–

* तीन परीक्षणों का माध्य

** मेथिल ग्लायोवसल को अनुकूलम सान्द्रताएँ

*** 144 घंटे तक इन ग्यूबबेशन अवधि में लैक्टिक अम्ल की अनुकूलाम लब्धि

**** लैक्टिक अम्ल की अ-सार्थक लब्धि लैक्टिक अम्ल का इत्पादन शीरा के उपभोग के संगल है।
प्रयोगिक विचलन $\pm 2.5 - 3.5$ %

परिणाम तथा विवेचना

एल० डेलब्रुकाई S-25 द्वारा लैक्टिक अम्ल के निमज्जित किण्वन पर मेथिल ग्लायोक्सल के प्रभाव का अध्ययन करने पर प्राप्त परिणाम सारणी में दिये गये हैं। इससे स्पष्ट हो जाता है कि मेथिल ग्लायोक्सल की उपस्थिति से लैक्टिक अम्ल की लब्धि काफी हद तक कम हो जाती है। मेथिल ग्लायोक्सल की सान्द्रता में वृद्धि होने पर लैक्टिक अम्ल के उत्पादन में उल्लेखनीय ह्रास हुआ। अधिकतम लैक्टिक अम्ल (5.272 ग्रा०/100 मिली) 144 घंटे की सर्वाधिक इनक्यूबेशन अवधि में मेथिल ग्लायोक्सल की 1.0×10^{-5}M सान्द्रता पर प्राप्त किया गया जो नियन्त्रण की तुलना में 0.22% कम है।

इस अध्ययन से पता चलता है कि मेथिल ग्लयोक्सल बैक्टीरिया के स्पोरों की अभिवृद्धि (*L. delbrueckii* S-25) को रोकता है। यह लैक्टिक अम्ल के उत्पादन में क्षति, आविलता में परिवर्तन तथा पी-एच के अप्रभावित रखने से स्पष्ट होता है।

उच्च सान्द्रता होने पर मेथिल ग्लायोक्सल *L. delbrueckii* S-25 की अभिवृद्धि को तथा एंजाइमों के संश्लेषण को अवरुद्ध करता है जिससे लैक्टिक अम्ल उत्पादन घटता है। हमारे प्रयोग दर्शाते हैं कि मेथिल ग्लायोक्सल से केवल *L. delbrueckii* S-25 का अंकुरण अवरुद्ध होता है। यह शाकीय कोशिकाओं के प्रति अविषैला है। यद्यपि मेथिल ग्लायोक्सल की सही सही क्रियाविधि अस्पष्ट है किन्तु दूध तथा दूध-उत्पादों में परिरक्षी के रूप में मेथिल ग्लायोक्सल का प्रयोग करने के पूर्व इसके पूर्ण रूप से विघटन की परीक्षा हो जानी चाहिए।

निर्देश

1. पाण्डेय एन० के०, : पी-एच डी० थीसिस, पन्तनगर कृषि एवं प्रौद्योगिकी विश्वविद्यालय,1975
2. ताकाहाशी के. : J. Biol. Chem., 1968, 243, 6171
3. कुमार, ए० गर्ग, जी के तथा जोशी, एल० जी० : Indian J. Microbiol, 1991, 31, 139.
4. ओ, कार्नर, आर० जे० तथा हाल्वोर्सजन, एच० ओ०, : J. Bacteriol., 1961, 82, 706,
5. प्रसाद, सी० , : J. Bacteriol., 1974, 119, 805
6. सिंह, एस० पी० कुमार, एस समदानी, जी तथा सिंह, एच० एन०, : Oriental J. Chem. 1998, 14, 139
7. बार्कर, एस० बी० (1998) तथा समुद्रसन डब्लू० एच० : J. Biol. Chem., 1944, 138, 535
8. डुबॉस, एस, जिलेसी, के० ए० हैमिल्टन, जे० के० तथा स्मिथर, एफ० : Ann. Chem., 1956, 28, 350

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.2, April, 2000.

'd⁹' आयनों द्वारा निर्मित चतुष्फलकीय संकुलों के इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद (E. P. R.) स्पेक्ट्रामिति का सैद्धान्तिक अध्ययन

एम० पी० यादव, एवं राम कृपाल
भौतिकी विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

तथा

आर० के० दुबे
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त - अक्टूबर 26, 1999]

सारांश

द्वितीय कोटि के क्षोभ सिद्धान्त (Perturbation theory) का उपयोग करके उन सभी आयन संकुलों का जिनकी संमिति है (संक्रमण धातु आयनों में आयन को विशेष रूप से लिया गया है), उनके स्पेक्ट्रमितीय विपाटक गुणकों g_{11}, $g_{\perp}$ g_{av} तथा G की गणना की गयी है।

Abstract

Theoretical studies of E.P.R. spectra of tetragonal (D_{4h}) complexes derived from 'd⁹' configuration. *By* M. P. Yadav and Ram Kripal, Department of Physics, University of Allahabad and R. K. Dubey, Department of Chemistry, University of Allahabad.

With the help of second-order perturbation theory, the calculation of g_{11}, $g_{\perp}$ g_{av} and G have been made for 'd⁹' complexes having D_{4h} symmetry.

किसी क्रिस्टल का क्रिस्टल अनुचुम्बकीय अनुनाद संख्या समूहों द्वारा देखा जा सकता है। स्पेक्ट्रम में दो लाइनों के बीच की दूरी यह प्रदर्शित करती है कि किसी आयन द्वारा अपने पास वाले आयन पर किस प्रकार का चुम्बकीय क्षेत्र लगाया गया है।

संक्रमण धातु आयनों के इलेक्ट्रान चक्रण अनुनाद (EPR) का उपयोग करके अयुग्मित एकल इलेक्ट्रान के चुम्बकीय व्यवहार के बारे में जानकारी प्राप्त की जा सकती है। मुक्त आयन तथा संकुल आयन के चुम्बकीय गुणों में अन्तर का अध्ययन ऋणात्मक आयन समूह पर क्रिस्टल क्षेत्र सिद्धान्त (Crystal Field Theory)[1] की सहायता से किया जा सकता है। इस सिद्धान्त से संक्रमण धातु संकुलों के इलेक्ट्रान प्रचक्रण अनुनाद के बारे में विवेचना नहीं की जा सकती क्योंकि इस सिद्धान्त में यह मान लिया जाता है कि ऋणात्मक आयन समूह तथा मुक्त आयन समूह दोनों में इलेक्ट्रान एक समान कक्षक में पाये जाते हैं।

सिद्धान्त

स्टेवान ने बताया कि प्रचक्रण कक्षा युग्मक स्थिरांक (Spin-orbital Coupling Constant) तथा अति सूक्ष्म परस्पर क्रिया (Hyperfine interaction) दोनों के गुणों में परिवर्तन लिगैंड के सहसंयोजक (Covalent) बन्ध के लक्षणों के साथ-साथ बदलता है।

किसी भी क्रिस्टल क्षेत्र (Crystal field) के लिए कक्षक. क्षोभित (perturbed) होते हैं, तो उनकी ऊर्जा का मान

$$H = \lambda L \,.\, S + \beta H \,.\, (L + 2S) \text{ होता है।}$$

प्रथम कोटि के क्षोभ सिद्धान्त से हम मूल अवस्था के लिए तरंग फलन को निम्न रूप में लिखते है–

$$\langle \psi_o | H^1 | \psi_o = 2\beta H \,.\, S' \rangle$$

तथा ऊर्जा स्तर में संशोधन प्राप्त करते हैं जो इस प्रकार है

$$E^{(1)} = -\sum_{n \neq 0} \frac{\langle \psi_0 | \lambda L \,.\, S \; + \; \beta H \,.\, L | \psi_0 \;\rangle}{(E_n - E_0)}$$

प्रथम तथा द्वितीय कोटि के क्षोभ सिद्धान्त[2] को एक साथ प्रयोग करने तथा $\lambda \; \beta \,.\, H$ के रेखीय पदों को साथ लेने पर -

$$E^{(1)} = 2\beta (\delta ij - \lambda \wedge ij) S_i H_j$$

$$\wedge_{ij} = \sum_{n \neq 0} \frac{\langle \psi_o (L_i | \psi_n \rangle \quad \langle \psi_n | L_j | \psi_o \rangle}{(E_n - E_o)}$$

$$g_{ij} = 2(\delta_{ij} - \lambda \wedge_{ij})$$

उपर्युक्त तथ्यों के आधार पर हम g_{11} तथा $g_{\perp}$ की गणना कर सकते हैं [3]

(1) मूल अवस्था dz^2

$$g_{11} = 2$$

$$g_{\perp} = 2\left(1 - \frac{3\lambda}{\Delta E_1}\right)$$

(2) मूल अवस्था $d x^2 - y^2$

$$g_{11} = 2\left(1 - \frac{4\lambda}{\Delta E_2}\right)$$

$$g_{\perp} = 2\left(1 - \frac{\lambda}{\Delta E_3}\right)$$

'g' का अधिक शुद्ध मान प्राप्त करने के लिए संशोधित क्षोभ सिद्धान्त का उपयोग किया जाता रहा है जिसकी संक्षिप्त विवेचना करना समाचीन होगा।

प्रथम कोटि के निरपेक्ष समीकरण को लिखने पर[4]

$$\left(E_o + P_o H' + \sum_{n \neq 0} \frac{P_o H' P_n H'}{(E_n - E_o)} - E\right) |0\rangle = 0$$

तथा

$$\tilde{H} = E_o + P_0 H' P_o - \sum_{n \neq 0} \frac{P_o H' P_n H' P_o}{(E_n - E_o)}$$

जो कि एक हरमीशियन आपरेटर है।

द्वितीय कोटि के लिए

$$1\rangle = T\,|\,0\rangle$$

जहाँ

$$T = \left(1 - \sum_{n \neq 0} \frac{P_o H'}{E_n - E_o} + \sum_{m \neq 0} \sum_{n \neq 0} \frac{P_n H' P_m H'}{(E_n - E_o)(E_m - E_o)} - \sum_{n \neq 0} \frac{P_o H' P_o H' + \frac{1}{2} P_o H' P_n H'}{(E_n - E_o)^2}\right) P_o$$

$$\langle 1 \rangle = \langle 0 \mid 0 \rangle, \quad T^* T = P_o$$

अतः किसी प्रेक्षित मान ξ को लिख सकते हैं,

$$\langle \mid \xi \mid \rangle = \langle 0 \mid \tilde{\xi} \mid 0 \rangle, \quad \xi = T^* \xi \, T$$

$$P_o H' P_o = P_o \left[\lambda L . S + \beta (L + 2S) . H \right] P_o$$

$$= 2 \beta S . H P_o$$

$$P_o H' P_n H' P_o = \langle 0 \mid Li \mid n \rangle \langle n \mid L_j \mid 0 \rangle \left(\lambda S_j + \beta H_j\right) \left(\lambda S_i + \beta H_i\right) P_o . \qquad (n \neq 0)$$

$$\therefore \tilde{H} = E_o + 2 \beta S . H - \sum_{n \neq 0} \frac{\langle 0 \mid Li \mid n \rangle \; \langle n \mid Lj \mid 0 \rangle}{(E_n - E_o)} \left(\lambda S_j + \beta H_j\right)\left(\lambda S_i + \beta H_i\right)$$

उपर्युक्त की सहायता से

$$g_{11} = 2 - \frac{8 \lambda}{E_2 - E_o} + \frac{4 \lambda^2}{(E_2 - E_o)^2} - \frac{8 \lambda^2}{(E_2 - E_o)(E_3 - E_o)} + \frac{\lambda^2}{(E_3 - E_o)^2}$$

$$g_{\perp} = 2 - \frac{2 \lambda}{E_3 - E_o} - \frac{2 \lambda^2}{(E_3 - E_o)^2} - \frac{\lambda^2}{(E_2 - E_o)(E_3 - E_o)}$$

परन्तु आजकल क्रिस्टल क्षोभ सिद्धान्त के बजाय अणु कक्षक सिद्धान्त (M. O. T.) का उपयोग करते हैं जिसके लिए हम निम्नलिखित परिकल्पनायें[5] करते हैं :-

(1) संकुल स्थैतिक जान टेलर प्रभाव का पूर्ण रूप से पालन करता है। यहाँ यह बताना आवश्यक होगा कि जान टेलर प्रभाव विकृति के कारण होता है। यद्यपि बहुत अधिक जान टेलर विकृति मूल अवस्था की संमिति को कम कर क्रामर डबलट[6] में बदल जाती है और तब इस स्थिति में कमरे के तापमान पर स्पेक्ट्रा का प्रेक्षण किया जा सकता है।

यदि कक्षक अपकर्ष है, तो त्रिफलकीय (Trigonal) विकृति को दूर नहीं किया जा सकता है। जब आवेश z-अक्ष कीदिशा में विस्थापित होता है तो D_{4h} संमिति में विकृति पैदा हो जाती है। ऐसी दशा में dz^2 कक्षा को स्थायी बना करके उन अयुग्मित इलेक्ट्रानों को छोड़ दिया जाता है जो dx^2-y^2 या dxy अवस्था में हैं तथा जिनके लिए g का मान लिखा जा सकता है।

$$g_{11} = 2.0023 + \frac{8\lambda}{\Delta E}\left(d_{x^2-y^2} - dxy\right)$$

$$g_{\perp} = 2.0023 + \frac{2\lambda}{\Delta E}\left(d_{x^2-y^2} - dxz,\ dyz\right)$$

(2) अणु तरंग फलन में अक्षीय लिगैन्ड की सहभागिता उपेक्षणीय होती है।

(3) केवल विपरीत बंध B^*_{2h} तथा E^*_g का विचार करते हैं।

कुछ Cu^{2+} संकुल[7] जिनमें अक्षीय विकृति होती है (अष्टफलकीय संमिति भी होती है) तथा जिनके dxy कक्षक में अयुग्मित इलेक्ट्रान उपस्थित होते हैं उनके स्पेक्ट्रा में निश्चित तथा चौड़ा एवम् उथला शिखर (Pronounced, broad and shallow peak)[8] पाया जाता है। यहाँ यह बताना आवश्यक है कि 'd^9' समूह के अष्टफलकीय Cu^{2+} संकुलों में अक्षीय विकृति होना एक विशेष गुण है।

परिणाम तथा विवेचना

तीनों विपरीत बंध स्तर B^*_{1g} , B^*_{2g} तथा E^*_g के लिए सर्वमान्य स्वतः अभिव्यक्ति निम्न रूप में लिखते हैं–

$$\alpha_i di - \beta_i \phi_i \quad (i = 0, 1, 2)$$

D_{4h} संमिति (विकृत Octrahedral Geometry या Tetragonal Geometry) के कारण केवल

B^*_{1g} स्तर में $n_s - n_p$ संकरण[9] होता है।

$$\phi_o = \mu \varphi_p + (1-\mu^2)\, \phi_s \quad (\mu \le 1)$$

उपर्युक्त तथ्यों का प्रयोग करके Δg_{11} तथा $\Delta g_{\perp}$ को निम्न प्रकार से ज्ञात कर सकते हैं[10]

$$\Delta g_{11} = -4 \sum_n \frac{\langle B^*_{2g} \mid H_{1s} \mid B^*_{1g} \rangle \langle B^*_{1g} \mid L_z \mid B^*_{2g} \rangle}{(E_n - E_o)}$$

$$\Delta g_{\perp} = 4 \sum_n \frac{\langle G^{-1}_g \mid H_{1s} \mid B^*_{1g} \rangle \langle B^*_{1g} \mid L_z \mid E^{+1}_g \rangle}{(E_n - E_o)}$$

जहाँ

$$H_{ls} = \sum_K \left[\sum_i \xi_i (r_{ik})\, I_{ik} \right]$$

r_{ik} = नाभिक i से इलेक्ट्रान k के बीच की दूरी

I_{ik} = कक्षक कोणीय संवेग (नाभिक i पर केन्द्रित इलेक्ट्रान k का)

धातु संकुल के लिए

$$H_{ls} = \xi_m (r_m)\, I_{m.s} + \sum_{l=1} \xi_L (r_L)\, I_{l.s}$$

$$I_{l.s} = I_x S_x + I_y S_y + I_z S_z$$

$$\Delta g_{11} = \frac{8\, \alpha_o^2\, \alpha_1^2\, \xi_M}{\Delta_1} \left[1 - \frac{\beta_o}{\alpha_o} \langle \mu \mid d_o \mid \varphi_p \rangle + (1-\mu^2)^{1/2} \langle d_o \mid \varphi_s \rangle - \frac{\beta_1}{\alpha_1} \langle d_1 \mid \varphi_p \rangle \right.$$

$$- \frac{\beta_o \beta_1 \mu}{2\alpha_o \alpha_1} - \frac{\beta_o \beta_1 \mu}{2\alpha_o \alpha_1} - \frac{\beta_o \beta_1}{2\alpha_1 \alpha_o} R \langle n_s | \frac{\partial}{\partial y} | n_{py} \rangle (1-\mu^2)^{1/2}$$

$$- \frac{\beta_o \beta_1}{2\alpha_o \alpha_1} \frac{\xi_M}{\xi_L} + \frac{\beta_o^2 \beta_1}{2\alpha_1 \alpha_o^2} \mu \langle d_o | \varphi_p \rangle + (1-\mu^2)^{1/2} \langle d_o | \varphi_s \rangle$$

$$+ \frac{\beta_o \beta_1^2}{2\alpha_o \alpha_1^2} \frac{\xi_M}{\xi_L} \langle d_1 | \varphi_p \rangle + \frac{\beta_o^2 \beta_1^2}{4\alpha_1^2 \alpha_o^2} \mu \frac{\xi_L}{\xi_M}$$

$$\left. + \frac{\beta_o^2 \beta_1^2 \xi_L}{4\alpha_o^2 \alpha_1^2 \xi_M} R \langle n_s | \frac{\partial}{\partial y} | n_{py} \rangle (1-\mu^2)^{1/2} \right]$$

तथा

$$\Delta g_1 = \frac{2\alpha_o^2 \alpha_2^2}{\Delta_2} \left[1 - \mu \frac{\beta_o}{\alpha_o} \langle d_o | \varphi_p \rangle + (1-\mu^2)^{1/2} \frac{\beta_o}{\alpha_o} \langle d_o | \varphi_s \rangle - \frac{\beta_o}{\alpha_o} \langle d_z | \varphi_p \rangle \right.$$

$$- \frac{\beta_o^2}{2\alpha_o^2} \mu - \frac{\beta_o^2}{2\alpha_o^2} R \langle n_s | \frac{\partial}{\partial y} | n_{py} \rangle - \frac{\beta_o \beta_2}{2\alpha_o \alpha_2} \frac{\xi_L}{\xi_M} + \frac{\mu}{2} \frac{\beta_o^2 \beta_2}{\alpha_o^2 \alpha_2} \langle d_o | \varphi_p \rangle$$

$$- \frac{\beta_o^2 \beta_2}{\alpha_o^2 \alpha_2} (! - \mu^2)^{1/2} \frac{\xi_L}{\xi_M} \langle d_o | \varphi_s \rangle + \frac{\beta_o^2 \beta_2}{2\alpha_o^2 \alpha_2} \frac{\xi_L}{\xi_M} \langle d_z | \varphi_p \rangle + \frac{\beta_o^3 \beta_2}{2\alpha_o^3 \alpha_2} \frac{\xi_L}{\xi_M}$$

$$\left. - \frac{\beta_o^3 \beta_2}{2\alpha_o^3 \alpha_2} \frac{\xi_L}{\xi_M} R \langle n_s | \frac{\partial}{\partial y} | n_{py} \rangle (1-\mu^2)^{1/2} \right]$$

$CuCl_4^{-2}$ के लिए g का मान विभिन्न स्तरों पर सैद्धान्तिक रूप से गणना द्वारा निकाला गया है जो कि प्रयोगात्मक मान के काफी नजदीक है जिसे सारणी 1 में दर्शाया गया है -

सारणी 1

क्रम सं०	शोधन की कोटि	g_{11}	$g_{\perp}$	g_{av}	G
1.	सहसंयोजक बंध की पूर्ण रूप से उपेक्षा करने पर	2.614	2.215	2.288	4.912
2.	धातु के केवल सहगुणांक को शामिल करने पर	2.307	2.048	2.134	6.395
3.	अतिव्यापन तथा *p*-कक्षक को साथ ले ने पर	2.268	2.044	2.118	6.090
4.	*p*- अतिव्यापन तथा *p*-कक्षक को साथ लेने पर	2.256	2040	2.112	6.400
5.	*s*- कक्षक को साथ लेने पर	2.239	2.033	2.100	7.242
6.	लिगैंड-लिगैंड अतिव्यापन तथा सारे समाकलन को साथ लेने पर	2.217	2.049	2.105	4.428

अक्षीय संमिति में g का सम्बन्ध G स्वतः अभिव्यक्ति $G = \frac{g_{11} - 2}{g_{\perp} - 2}$ से दिया जाता है, जिसके द्वारा बहुक्रिस्टलीय ठोसों में कापर केन्द्रों के बीच आन्तरिक क्रिया परिवर्तन[11] को मापते हैं। यदि $G > 4$ तब आन्तरिक क्रिया परिवर्तन का मान उपेक्षणीय होता है। यदि $G < 4$ तब आन्तरिक क्रिया परिवर्तन को महत्व देते हैं।

$g_{av} = \frac{1}{3}(g_{11} + 2g_{\perp})$[1] यदि इसका मान 2.23± 0.07 हो तो कक्षकीय के बिना अपकर्ष के मूल अवस्था[12] के मान से सहमति देता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक प्रो० बी० एन० मिश्र, भौतिकी विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद के अत्यन्त आभारी हैं जिन्होंने बहुमूल्य सुझावों से सहयोग प्रदान किया है।

निर्देश

1. फिगिस्, बी० एन० : Introduction to Ligand Fields, Wiley Eastern Ltd. U.S. Edn. 1966.

2. अब्रागम, ए० तथा प्राइस, एम० एच० एल०; Proc Roy., Sec A 1951, 205, 135

3. बाल हाउजन, सी० जे० ई० : Introduction to Ligand Field Theory, McGraw Hill, 1962

4. प्राइस, एम० एच० एल० : Proc. Phys., 1950a Sec. A 1950a, 63, 25

5. मोरैनो, एम० : Journal of Physics C, Solid state Physics, 1976, 9, 3277

6. साइमन्स, एम० : Chemical & Biological Aspects of E.S.R. Spectroscopy, Ostrand Reinhold, New York, 1978.

7. सुन्दर, एच० जी० के० तथा राव, के० जे० : J. Non Crys. Solids, 1982, 50, 137, CA (1982) 83898a.

8. दुबे, आर० के०, सिंह, ए० तथा मेहरोत्रा, आर० सी० : Transition Metal Chem., 1985, 10, 473.

9. किविल्सन, डेनियल तथा निमैन, राबर्ट : Journal of Chemical Physics, 1961, 35, 1491.

10. स्मिथ, डी० डब्ल्यू० : Journal of Chemical Soc. 1970, 1498.

11. प्राक्टर, आई० एम०, हाथवे, बी० जे० तथा निकोल्स, पी० एन० : J. Chem. Soc., A 1968, 1978.

12. दुबे, आर० के०, सिंह, ए० तथा मेहरोत्रा, आर० सी० : Polyhedron, 1987, 6, 427

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.2, April, 2000

स्लीव अंतराल : एकसमान तथा असमान क्षेत्रों में नाइट्रोजन में जोशी प्रभाव के निर्धारक के रूप में

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कॉलेज, मेरठ

[प्राप्त – जनवरी 24, 2000]

सारांश

एकसमान तथा असमान क्षेत्र में नाइट्रोजन में जोशी प्रभाव Δi का अध्ययन किया गया। एकसमान क्षेत्र में $-\Delta i$ के अधिक होने का प्रेक्षण हुआ। स्लीव उत्तेजन के अन्तर्गत, जो असमान क्षेत्र निर्मित होता है, एकसमान क्षेत्र उत्तेजन की तुलना में, ऋणात्मक प्रभाव पुनः कम था। इसका कारण बाद वाले के इलेक्ट्रोड के अधिक पृष्ठीय क्षेत्र होने को माना गया। स्लीव अंतराल में ह्रास के साथ विसर्जन कम आंतरायिक हो गया तथा $-\Delta i$ घट गया।

Abstract

Sleeve separation as a determinant of Joshi effect in nitrogen under uniform and non-uniform field. *By* Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Studies of Joshi effect Δi in nitrogen have been carried out under an uniform and a non-uniform field. It was observed that $-\Delta i$ was larger in the former case. Under sleeve excitation, which also gives a non-uniform field, the negative effect was again lesser than that under uniform field excitation. This has been ascribed to the greater surface area of the electrodes in the latter case. With decrease in sleeve separation, the discharge became less intermitant and $-\Delta i$ decreased.

जोशी प्रभाव Δi पर अनुप्रयुक्त विभव के उल्लेखनीय प्रभाव का प्रेक्षण अनेक शोधार्थियों द्वारा हुआ है।[1-3] एकसमान तथा असमान क्षेत्रों में Δi अध्ययन सम्बन्धित आँकड़े, जबकि अन्य दशाएँ अभिन्न हों, उपलब्ध नहीं हैं। अतः एकसमान तथा असमान क्षेत्रों में, गैस दाब $\times$ अंतराल दूरी के एक स्थिर मान पर, Δi का अध्ययन किया गया है। समांतर तल या तल तक नुकीले इलेक्ट्रोड को एकसमान तथा असमान क्षेत्रों की प्राप्ति के लिए प्रयुक्त किया गया।[4, 5] स्लीव इलेक्ट्रोडों द्वारा नली को उत्तेजित करके भी बाद वाले क्षेत्र को प्राप्त किया गया था।[6] Δi का स्लीव अंतराल के साथ परिवर्तन का भी अध्ययन किया गया है।

प्रयोगात्मक

सामान्य उपकरण का समायोजन तथा प्रयुक्त विद्युतीय परिपथ पूर्व प्रकाशित लेख[7] के समान थे। Δi का अध्ययन 19 मिमी० अभ्यंतर व्यास की काँच नली में किया गया, जिसके सिरे 25 मिमी० की दूरी पर तथा चपटे थे, 40 मिमी० व्यास की ताँबे की दो चक्रिकाओं को नली के दोनों सिरों पर सटा कर लगाया गया, जो दो इलेक्ट्रोडों की भाँति थीं। नली के चपटे सिरों के साथ अच्छा सम्पर्क स्थापित करने के लिए ताँबे की चक्रिकाओं को टीन-पन्नियों के ढक दिया गया। पूर्णतः एकसमान क्षेत्र को सुनिश्चित करने के लिए इलेक्ट्रोडों के व्यास को नली की तुलना में पर्याप्त अधिक रखा गया।[8]

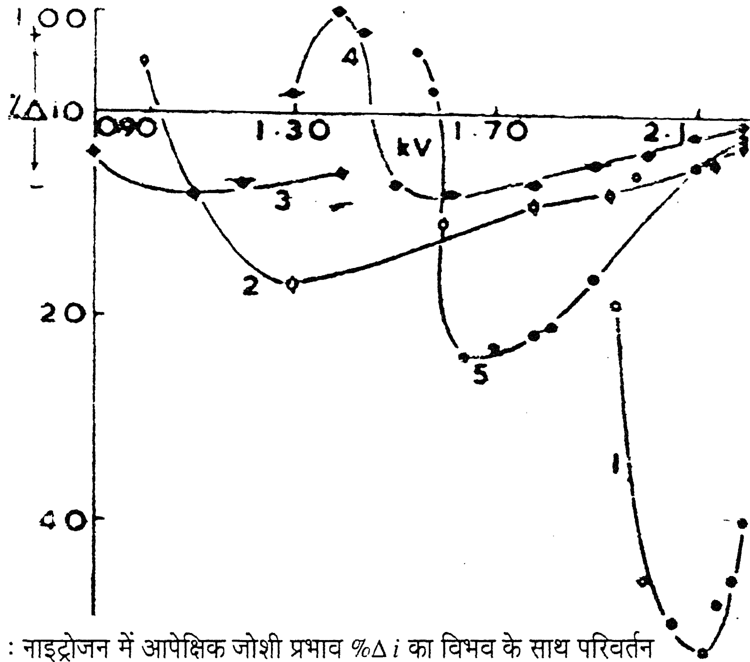
विसर्जन नली को आठ घंटे तक निर्वात में विगैसित किया गया। नली को कई बार नाइट्रोजन से प्रक्षलित करके अन्त में 20 मिमी० Hg, 20°C पर नाइट्रोजन से भर लिया गया। नली की बेकिंग की क्रिया क्रमशः घटते हुए दो तापों पर सम्पन्न की गई।[9] विगैसित करने तथा पारदवाष्प से मुक्ति की क्रिया पूर्व प्रकाशित विधियों के अनुसार सम्पन्न की गई।[7, 10, 11]

Δi पर कालप्रभावन के प्रभाव को सर्वप्रथम एकसमान क्षेत्र में उत्तेजित करके अध्ययन किया गया। तत्पश्चात्, ताँबे की एक चक्रिका के स्थान पर 0.2 मिमी० मोटे कॉपर के बारीक सिरे के इलेक्ट्रोड को प्रस्थापित करके एकसमान क्षेत्र तथा असमान क्षेत्र में तुलनात्मक अध्ययन किया गया। नली के एक चपटे सिरे के केन्द्र पर नुकीले सिरे को दबाते हुए रखा गया। तदुपरान्त विसर्जन नली में स्लीव इलेक्ट्रोड लगाये गए, जिनसे भी असमान क्षेत्र निर्मित होता है।[6] इस प्रकार, स्लीव अंतराल को 8 से 25 मिमी० के परास में बदलते हुए Δi का अध्ययन किया गया।

परिणाम तथा विवेचना

एकसमान क्षेत्र-उत्तेजन के अध्ययनों से पता लगा कि नई तैयार की हुई नली में धारा i परिवर्ती थी और दीप्ति आंतरायिक थी। जैसे-जैसे नली का काल प्रभावन किया गया, विसर्जन दीप्ति कम आंतरायिक तथा एकसमान वितरित होती चली गई। दर्रे का मुख्य भंग मुख्य रूप से दो कारकों पर निर्भर होता है, अर्थात् अभीष्ट तथा उपयुक्त अवस्थित प्राथमिक इलेक्ट्रॉन[12] तथा द्वितीयक प्रक्रमों के वर्धन के लिए दर्रे के आर-पार पर्याप्त ऊँची वोल्टता।

एक बार जब विसर्जन आरम्भ हो जाता है तो नली की आन्तरिक दीवारों पर आवेश एकत्रित होने लगते हैं,[13] और काँच की दीवारों के सूक्ष्म क्षेत्रों के बीच विकसित इलेक्ट्रॉन एवेलांश की मालाएँ धारा स्पंद को निर्भित करती हैं। इलेक्ट्रोड दीवारों पर आयनों की बौछार के कारण सीमांत तल का कार्य-फलन घट जाता है। अथवा जिन इलेक्ट्रॉनों का प्रथम अर्ध चक्र में शिथिलीकरण नहीं हुआ होता है, बाद में अर्ध चक्र के दौरान वे इलेक्ट्रोड को पर्याप्त प्रकाश-संवेदनशीलता प्रदान करते हैं।[14] अनुप्रयुक्त क्षेत्र के प्रभाव से भी, शोट्की परिणाम के कारण सीमांत तल का कार्य फलन कम हो जाता है।[14-17] काल प्रभावन के पश्चात् अवलोकित अधिक चमकीली तथा अधिक एकसमान दीप्ति की व्याख्या, विसर्जन के दौरान आयनों की बौछार के कारण, इलेक्ट्रोड के कार्य-फलन में हुए ह्रास के फलस्वरूप, पात्र के आन्तरिक तलों से आरम्भ होने वाले एवेलांशों की संख्या बढ़ जाती है। काल प्रभावन पू र्वΔi अधिकतम –25% की, कालप्रभावन के पश्चात् के अधिकतम 3% परिमाण की वृद्धि की व्याख्या भी इलेक्ट्रोड के कार्य-फलन के ह्रास के कारण किरणन के दौरान हुए इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन के आधार की जा सकती है।



चित्र 1 : नाइट्रोजन में आपेक्षिक जोशी प्रभाव %Δi का विभव के साथ परिवर्तन

वक्र 1 : एकसमान क्षेत्र के अन्तर्गत उत्तेजन;

वक्र 2 : असमान क्षेत्र के अन्तर्गत उत्तेजन;

वक्र 3 : स्लीव-अंतराल d = 8 मिमी० के साथ;

वक्र 4 : d = 15 मिमी० के साथ

वक्र 5 : d = 25 मिमी० के साथ।

एकसमान तथा असमान क्षेत्र-उत्तेजन के अध्ययनों से यह तथ्य उभरा है कि एकसमान क्षेत्र में $-\Delta i$ का परिणाम अधिक होता है। (चित्र 1) तथा च, इसका भी अवलोकन हुआ है कि दाब × अंतराल दूरी ($p \times d$) के एक निश्चित मान के लिए, एकसमान क्षेत्र की तुलना में, एकसमान क्षेत्र का देहली विभव Vm का मान कम था। यह अन्य गैसों में प्राप्त परिणामों के अनुकूल है।[18] देहली विभव एक बिन्दु और तल के बीच, वायु के तंग दर्रों के लिए भंग वोल्टता का मापन किया गया।[19] अब तक अधिकांश उच्च दाब कोरोना सम्बन्धी शोध कार्य वायु में[20, 21] तथा बिन्दु-तल अंतराल में हुआ है; इस प्रकार के आकार-प्रकार के चयन का कारण यह है कि इसमें अंतराकाशी आवेश का स्थानीकरण अधिक प्रभावी होता है।[5] वायु में ऋणात्मक कोरोना के प्रयोगों से पता लगा है कि कोरोना धारा में नियमित स्पंदनों की श्रेणियाँ होती हैं, पर्याप्त कम धाराओं पर, जिनकी आवृत्ति माध्य धारा के साथ बढ़ जाती है।[20, 22] सी. आर. ओ. द्वारा धारा संरचना अध्ययन से पता लगा कि एकसमान क्षेत्र की तुलना में, असमान क्षेत्र में एच. एफ. स्पंदनों की संख्या तथा परिमाण कम था। इस प्रकार के असमान क्षेत्र में घटनाओं के तीव्र अंतराकाशी स्थानीकरण के कारण, Vm में ह्रास होना समझ में आता है। असमान क्षेत्र उत्तेजन में धारा का अधिक परिमाण होना Vm में ह्रास के कारण है, क्योंकि नली-धारा V–Vm का फलन होती है।[23–27] बिन्दु से तल के आकार-प्रकार में, बिन्दु से आस-पास का क्षेत्र ही मुख्य निर्धारक कारक है, जबकि तल इलेक्ट्रोड का नगण्य महत्व है।[4]

ऐसा अवलोकित हुआ है कि एकसमान क्षेत्र में दीप्ति पूरी नली में समान रूप से वितरित थी, जबकि असमान क्षेत्र में यह नुकीले इलेक्ट्रोड के आसपास सांद्रित थी। इस प्रकार विसर्जन पथ से नली की दीवारों की दूरी बढ़ गई। ऐसा देखा गया है कि Δi का अधिकतम मान तब होता है जब नली की दीवारें इलेक्ट्रोडों के निकटतम होती हैं।[28] इससे, बिन्दु-तल इलेक्ट्रोड की तुलना में, समांतरतल इलेक्ट्रोडों की अवस्था में अधिक $-\Delta i$ होने की व्याख्या होती है।

स्लीव उत्तेजन जिससे भी असमान क्षेत्र निर्मित होता है,[6] उसके अन्तर्गत Δi के अध्ययन से बिल्कुल इसी प्रकार के परिणाम प्राप्त हुए। बिन्दु-तल इलेक्ट्रोड की तुलना में, स्लीव उत्तेजन अवस्था में Vm का मान अधिक था। स्पष्टतः यह इसी कारण है कि बिन्दुतल इलेक्ट्रोड की अवस्था में विद्युत-क्षेत्र अधिक असमान होता है। बिन्दु-तल इलेक्ट्रोड की तुलना में ऋणात्मक प्रभाव का परिमाण भी तनिक अधिक था। क्योंकि स्लीव उत्तेजन में विसर्जन नली की दीवारों के सहारे चलता है, अतः बिन्दु-तल इलेक्ट्रोड की अपेक्षा दीवारों से प्रकाश-इलेक्ट्रानों का उत्सर्जन अधिक होगा। एकसमान क्षेत्र की तुलना में स्लीव उत्तेजन के अन्तर्गत $-\Delta i$ का परिमाण कम होने का कारण यह है कि स्लीव उत्तेजन में इलेक्ट्रोडों का पृष्ठीय क्षेत्र अधिक होता है। जिसका पृष्ठीय क्षेत्र अधिक होगा उतना ही अधिक किरणन के दौरान कुल इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन अधिक होगा।[29]

अन्तरा-स्लीव दूरी घटने के साथ ऋणात्मक प्रभाव घट गया (चित्र 1)। तथा च, स्लीव-अतंराल को घटाने से उत्सर्जक भित्ति तल का क्षेत्रफल घट गया जो प्रकाश-इलेक्ट्रॉनों का उत्सर्जन Δi को उत्पन्न करता है। इससे अन्तरा-स्लीव दूरी के घटने से $-\Delta i$ के घटने की व्याख्या होती है।

जब स्लीव अंतराल 4 मिमी० या इससे कम था तब काल प्रभावन से अंधकार में धारा तीव्र गति से घटी। किरणन के कारण यह गिरावट और अधिक तीव्र हो गई, जिससे $-\Delta i$ की उपस्थिति प्रकट होती है। लगभग एक मिनट में धारा अपरिवर्ती हो गई। नली को विरामावस्था-प्रयोगशाला के ताप पर नली को अनुत्तेजित अवस्था में कुछ देर रखने से यह गिरावट पुनः अवलोकनीय थी। विसर्जन का यह विशिष्ट लक्षण बताया गया है, जबकि इलेक्ट्रोड अंतराल अदीप्त प्रदेश की मोटाई के लगभग बराबर होता है।[30] जब विभवांतर पहली बार अनुप्रयुक्त किया जाता है तो धारा में ह्रास होता है।[30] धारा पहले तीव्र गति से घटती है और फिर धीरे-धीरे। कुछ समय पश्चात् यह कोई एक मान प्राप्त कर लेती है और स्थिर रहती है, किन्तु कभी-कभी विसर्जन बिल्कुल बन्द हो जाता है। इस घटना का नाइट्रोजन, ऑक्सीजन, हाइड्रोजन, हीलियम तथा कार्बन डाइ-ऑक्साइड में प्रेक्षण हुआ है।[30] प्रारम्भिक अवस्थाओं में, अधिक नली-धारा के कारण विसर्जन अविच्छिन्न हो सकता है किन्तु i के घटने से स्पंदन दृष्टिगोचर होते हैं। स्पंदनों के बीच की कालावधि बढ़ जाती है और कभी-कभी विसर्जन बिल्कुल बन्द हो जाता है। स्पंदनों को प्रभावित करने वाले अनेक कारक हैं। इस दशा में नली स्थिर वैद्युत प्रभावों के लिए बहुत संवेदनशील हो जाती है, यथा-अंगुली या भूसम्पर्कित धात्वीय इलेक्ट्रोड को नली के पास लाने से स्पंदन गति बदल जाती है। धारा के इस ह्रास का कारण यह है कि नली की दीवारों पर अधिक वितरण स्थित हो जाता है जो एक विपरीत विद्युत्वाहक बल उत्पन्न करता है।[30]

कृतज्ञता-ज्ञापन

डॉ० पी० के० टिकू के अमूल्य सुझावों के लिए लेखक आभारी है।

निर्देश

1. मोहन्ती, एस० आर०, जयरामन्, जे० तथा राव, जी० वी० जी० के०, जर्न० साइंस इण्डस्ट्रियल रिसर्च, 1954, 133, 526.

2. जाटार, डी० पी०, वही, 1950, 9B, 283.

3. प्रसाद, जे०, पी-एच० डी० थीसिस, बनारस हिन्दू , 1961.

4. लॉब, एल० बी०, Fundamental Processes of Electrical Discharge through Gases, 1939, John Wiley.

5. मीक, जे० एम० तथा क्रैग, जे० डी०, Electrical Breakdown of Gases, 1953, Oxford.

6. फ्रांसिस, जी० तथा फ्रान एञ्जिल, ए०, फ़िला० ट्रांज़, 1953, 246, 143.

7. प्रसाद, जे०, जर्न० साइं० रिस०, जी० के० वी०, 1975, 6, 1; डी० एससी० थीसिस, मेरठ विश्वविद्यालय, 1986.

8. आगाशे, वी० वी०, जर्न० केमि० फिज़ि० 1951, 19, 1002.

9. लांग्म्यूर, आई०, जर्न० अमे० केमि० सोसा०, 1916, 38, 2221.

10. प्रसाद, जे०, बोल० सोसा० क्रिम०, 1982, 48, 88.

11. प्रसाद, जे०, ऐक्टा सिन्सिया इण्डिका, 1975, 1, 273.

12. इंग्लिश, डब्ल्यू० एन०, फिज़ि० रिव०, 1948, 74, 170.

13. हैरीज, डब्ल्यू० एल० तथा फ़ॉन एञ्जिल, ए०, प्रोसी० रॉयल सोसा०, 1951, 643, 916.

14. मोहन्ती, एस० आर०, जर्न० साइं० रिस०, बी० एच० यू०, 1955–56, 6(1), 58.

15. शोट्की, डब्ल्यू०, ज़ेड० फ़िज़०, 1923, 14, 63.

16. अर्निकर, एच० जे०, इण्डियन जर्न० फ़िजि०, 1951, 25, 353.

17. लॉरेंस, ई० ओ० तथा लिन्फ़ोर्ड, एल० बी०, फ़िज़ि० रिव०, 1930, 36, 482.

18. कोबीन, जे० डी०, : Gaseous Conductors, 1941, मैग्रॅहिल

19. स्ट्रिञ्जेल, आर०, आर्च० इलेक्ट्रोटेक०, 1933, 27, 377.

20. वेस्लर, जी० एल० तथा मोह्, ई० आई०, फ़िज़ि० रिव०, 1947, 72, 289.

21. लॉब, एल० बी०, जर्न० एप्ला० फ़िज़ि०, 1948, 19, 882.

22. ट्रिचेल, जी० डब्ल्यू०, फ़िज़ि० रिव०, 1938, 54, 1078.

23. जोशी, एस० एस०, करेंट साइंस, 1946, 15, 281.

24. जोशी, एस० एस०, वही, 1947, 16, 19.

25. जोशी, एस० एस०, प्रोसी० इण्डियन साइं० कांग्रेस, फ़िज़ि० सेक्शन, 1946, ऐब्स्ट्रै० 26.

26. जोशी, एस० एस०, वही, प्रेसिडेंशल ऐड्रेस, केमि० सेक्शन, 1943, 51.

27. जोशी, एस० एस०, करेंट साइंस, 1939, 8, 548.

28. प्रसाद, जे०, विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1982, 25, 265.

29. प्रसाद, जे०, बंग्लादेश जर्न० साइं० इण्डस्ट्रि० रिस०, 1984, 19, 84.

30. थॉम्सन, जे० जे० तथा थॉम्सन, जी० पी०, Conduction of Electrcity through Gases, Vol. II, 1933, कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.2, April, 2000.

मैट्रिक्स आर्गुमेंट के समाकल रूपान्तर का अध्ययन

आर० के० कुम्भट तथा सीमा सिंघल
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जयनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त–नवम्बर 22, 1999]

सारांश

इस प्रपत्र में मैट्रिक्स चर के स्टील्जे रूपान्तर के कुछ गुण दिये गये हैं और मैट्रिक्स चर के लाप्लास रूपान्तर के साथ इसके सम्बन्ध पर कुछ प्रमेय सिद्ध किये गये हैं।

Abstract

Study of integral transform of matrix argument. *By* R. K. Kumbhat and Seema Singhal, Department of Mathematics and Statistics, J. N. V. University, Jodhpur (Raj.) .

The paper deals with certain properties of Stieltjes transfotm of matrix variable defined by

$$G'(P) = \int_{T>0} |P+T|^{-\lambda} f(T)\, dT \,.\, R(\lambda) > \frac{m-1}{2}$$

Some therorems on its relationship with Laplace transform of matrix variable are proved. The areas where such relations can be applicable are pointed out. The tables of Laplace and Stieltjes transforms of matrix variable are also given as an appendix.

1. प्रस्तावना

1.1 मैट्रिक्स चरों वाले समाकल रूपान्तर

समीकरण

$$F(P) = \xi\,[\,k(P\,.\,T)\,; f(T)\,]\,; f(T)\,] = \int k(P\,.\,T) f(T)\, dT \tag{1.1}$$

S अवकाश में माप dT के प्रति समाकल है जहाँ $P (= [P_{ij}])$ तथा $T (= [t_{ij}])$ $m \times m$ वर्ग के धनात्मक निश्चित सांकेतिक मैट्रिक्स हैं जिनके $m(m + 1)/2$ अदिश चर क्रमशः O शून्य मैट्रिक्स है f संमित फलन है इस अर्थ में कि

$$F(AB) = f(BA) = f(B^{1/2} A B^{1/2}) = f(A^{1/2} B A^{1/2})$$

तथा

$$dT = dt_{11}\, dt_{21}\, dt_{31} \,........\, dt_{m1} \,.........\, dt_{mn}$$

समस्त धनात्मक निश्चित संमित मैट्रिक्स के सेट पर $T > 0$ बताता है। T धनात्मक निश्चित है। जब भी यह विद्यमान होता है यह $F(t)$ के $f(p)$ में रूपान्तर को परिभाषित करता है। मैट्रिक्स P का फलन $F(P)$ अष्टि $K(P,T)$ के लिए फलन $f(T)$ के मैट्रिक्स चर का समाकल रूपान्तर कहलाता है।

1.2 मैट्रिक्स चर का लाप्लास रूपान्तर

यदि हम अष्टि

$$K(P \,.\, T) = etr\,(-PT) \text{ लें}$$

जहाँ

$$P = [\delta_{ij} p_{ij}],\ \delta_{ij} = 1$$

क्योंकि $i = j$, $\delta_{ij} = 1/2$ क्योंकि $i \neq j$. $etr\,(X) = e^{trX}$. $tr\,X = X$ तो (1.1) से प्राप्त होता है।

$$\phi(P) = \xi\,[\,etr\,(-PT) : f(T)\,] = \int_{T>0>} etr\,(-PT)\, f(T)\, dT \qquad (1.2)$$

जो समसत धन निश्चित संमित मैट्रिक्सों के सेट के लिए मैट्रिक्स चर का लाप्लास रूपान्तर कहलाता है।

1.3 मैट्रिक्स चर का स्टील्टजे रूपान्तर

यदि हम अष्टि

$$k(P \,.\, T) = [\,P + T\,]^{-\lambda} \,.\, R(\lambda) > \frac{m-1}{2}$$

लें जहाँ $|P + T| = \det(P + T)$ $(P + T)$ का सारणिक (determinant) तो (1.1) से

$$G^{\lambda}(P) = \xi\,[\,|P+T|^{-\lambda} : f(T)\,] = \int |P+T|^{-\lambda} : f(T)\,dT,\ R(\lambda) > \frac{m-1}{2} \quad (1.3)$$

प्राप्त होता है जो मैट्रिक्स चर का स्टील्जे रूपान्तर कहलाता है।

सक्सेना ने[4, 5, 6] समाकल रूपान्तर के गुणधर्म दर्शित किये हैं जहाँ अदिश चर है।

हाल ही में कुम्भट तथा भण्डारी ने[1] (1.3) के लिए व्युत्क्रमण सूत्र तथा मैट्रिक्स चर के स्टील्जे रूपान्तर को

$$f(X) = I_X^{-1}\,[\,\Gamma_m(\alpha)\,|Y|^{-\alpha+\frac{m+1}{2}}\; L_y^{-1}\,[\,G^{\alpha}(T)]$$

के रूप में दिया है। जहाँ L^{-1} सूचित करता है मैट्रिक्स के व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर को तथा

$$\Gamma_m(\alpha) = \pi^{m\frac{m+1}{4}}\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma\left(a-\frac{1}{2}\right)\ldots\ldots\;\Gamma\left(\alpha-\frac{m-1}{2}\right), R(\alpha) > \frac{m-1}{2}$$

2. इस प्रपत्र का उद्देश्य उस सम्बन्ध को ज्ञात करना है जो (1.2) तथा (1.3) द्वारा परिभाषित मैट्रिक्स चर के लाप्लास तथा स्टील्जे रूपान्तर के मध्य पाया जाता है। प्रतिस्थापित प्रमेयों की पुष्टि उपयुक्त उदाहरणों के द्वारा की गई है।

विस्तृत अध्ययन के लिए पाठक मथाई[2] एवं मथाई तथा सक्सेना[3] को देखें।

पूरे प्रपत्र में (1.2) तथा (1.3) के क्रमशः सांकेतिक रूप में निम्नवत् प्रदर्शित किया जावेगा–

$$\phi(P) \overset{L}{=} f(T) \quad \text{तथा} \quad G(P) \overset{S}{=} f(T) \quad (1.4)$$

विचारित सारे मैट्रिक्स $m \times n$ वर्ग के असली संमित धनात्मक हैं।

प्रमेय 2.1

यदि $\phi_1(P) \overset{L}{=} g_1(T)$ तथा $\phi_2(P) \overset{L}{=} g_2(T)$

तो
$$\int_{T>0} \phi_1(T)\, g_2(T)\, dT = \int_{T>0} g_1(T)\, \phi_2(T)\, dT \quad (2.1)$$

वशर्ते कि $g_1(T)$ तथा $g_2(T)$ के मैट्रिक्स चर का लाप्लास परिवर्त विद्यमान हो तथा समाकल पूर्णतया अभिसारी हो।

उपपत्ति : हमें प्राप्त है

$$\phi_1(P) = \int_{T>0} \operatorname{etr}(-PT)^{-\lambda} g_1(T)\, dT,$$

तथा

$$\phi_2(P) = \int_{T>0} \operatorname{etr}(-PT)^{-\lambda} g_2(T)\, dT,$$

अतः

$$\int_{T>0} \phi_1(T)\, g_2(T)\, dT = \int_{t>0} \left[\int_{U>0} \operatorname{etr}(-TU)\, g_1(u)\, du \right] g_2(T)\, dT$$

समाकलन के क्रम को बदलने पर जो प्रमेय में कथित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत अनुमत है -

$$\int_{T>0} \phi_1(T)\, g_2(T)\, dT = \int_{U>0} g_1(U) \left[\int_{T>0} \operatorname{etr}(-TU)\; g_2(T)\, dT \right] dU$$

$$= \int_{U>0} g_1(U)\, \phi_2(U)\, dU$$

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

प्रमेय 2.2

यदि $G_1(P) \stackrel{s}{\overline{\overline{\lambda}}} g_1(T)$ तथा $G_2(P) \stackrel{s}{\overline{\overline{\lambda}}} g_2(T)$

तो
$$\int_{T>0} G_1(T)\, g_2(T)\, dT = \int_{T>0} g_1(T)\, G_1(T)\, dT \qquad (2.2)$$

बशर्ते कि $g_{1(}T)$ तथा $g_{2(}T)$ के मैट्रिक्स चर के स्टील्जे रूपान्तर का अस्तिव हो और समाकल पूर्णतया अभिसारी हो।

उपत्ति : हमें प्राप्त है

$$G_1(P) = \int_{T>0} |P+T|^{-\lambda}\; g_1(T)\, dT\, .\, R(\lambda) > \frac{m-1}{2}$$

तथा

$$G_2(P) = \int_{T>0} |P+T|^{-\lambda}\; g_2(T)\, dT\, .\, R(\lambda) > \frac{m-1}{2}$$

अतः

$$\int_{T>0} G_1(T)\, g_2(T)\, dT = \int_{T>0} \left[\int_{U>0} |T+U|^{-\lambda}\, g_1(U)\, dU \right] g_2(T)\, dT$$

अतः समाकल का क्रम बदलने पर जो प्रमेय में कथित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत अनुमत है

$$\int_{T>0} G_1(T)\, g_2(T)\, dT = \int_{U>0} g_1(U) \left[\int_{T>0} |T+U|^{-\lambda}\, g_2(T)\, dT \right] dU$$

$$= \int_{U>0} g_1(U)\, G_2(U)\, dU$$

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

प्रमेय 2.3

यदि $G(P) \overset{S}{\underset{\lambda}{=}} f(T)$ तथा $|P|^{\frac{m+1}{2}-\nu} f(P) \overset{S}{\underset{\mu}{=}} I(T)$

तो

$$G(P) = \frac{\Gamma_m(\nu)\,\Gamma_m(\lambda+\mu-\nu)}{\Gamma_m(\lambda+\mu)} |P|^{\nu-\lambda}.\ \xi\left[|T|^{-\mu}\, {}_2F_1(\mu, \nu; \lambda+\mu; 1-PT^{-1}); h(T) \right]$$

$$R(\nu) > \frac{m-1}{2},\ R(\lambda+\mu-\nu) > \frac{m-1}{2} \qquad (2.3)$$

जहाँ T^{-1} से मैट्रिक्स T का व्युत्क्रम मैट्रिक्स सूचित होता है तथा I क्रम $m \times m$ के तत्समक (identity) मैट्रिक्स को सूचित करता है। बशर्ते कि $f(T)$ तथा $g(T)$ के मैट्रिक्स चर के स्टील्जे रूपान्तर का अस्तित्व हो और समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

उपपत्ति : हमें प्राप्त है

$$G(P) = \int_{T>0} |P+T|^{-\lambda} f(T)\, dT,\ R(\lambda) > \frac{m-1}{2}$$

तथा

$$|P|^{\frac{m+1}{2}-\nu} f(P) = \int_{T>0} |P+T|^{-\mu}\, h(T)\, dT,\ R(\mu) > \frac{m-1}{2}$$

अतः

$$G(P) = \int_{T>0} |P+T|^{-\lambda} |T|^{-\mu-\left(\frac{m+1}{2}\right)} \left[\int_{U>0} |T+U|^{-\mu}\, h(U)\, dU \right] dT$$

समाकलन का क्रम बदलने पर जो प्रमेय में कथित प्रतिबन्ध के अन्तर्गत अनुमत है

$$G(P) = \int_{T>0} h(U) \left[\int_{T>0} |P+T|^{-\lambda} |T|^{-\nu-(\frac{m+1}{2})} |T+U|^{-\mu} dT \right] dU$$

$$= \frac{\Gamma_m(\nu)\,\Gamma_m(\lambda+\mu-\nu)}{\Gamma_m(\lambda+\mu)} |P|^{\nu-\lambda} \int_{U>0} |U|^{-\mu} {}_2F_1(\mu, \nu; \lambda+\mu; 1-PU^{-1})$$

$$.\ h(U)\,dU,\ R(\nu) > \frac{m-1}{2},\ R(\lambda+\mu-\nu) > \frac{m-1}{2}$$

[II(5) का प्रयोग करने पर]

अतः प्रमेय सिद्ध हुआ।

प्रमेय 2.4

यदि $G(P) \underset{\lambda}{\overset{S}{=}} f(T)$ तथा $\Psi(P) \overset{L}{\underset{\cdot}{=}} f(T)Æ$

तो

$$G(P) \overset{L}{\underset{\cdot}{=}} \frac{1}{\Gamma_m(\lambda)} |T|^{\lambda-\frac{m+1}{2}} \Psi(T),\ R(\lambda) > \frac{m-1}{2} \qquad (2.4)$$

बशर्ते कि समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

उपपत्ति : हमें पता है कि

$$\Psi(P) \overset{L}{\underset{\cdot}{=}} f(T) \qquad (2.5)$$

तथा

$$|P+B|^{-\lambda} \overset{L}{=} \frac{etr(-BT)\,|T|^{-\lambda-(\frac{m+1}{2}t)}}{\Gamma_m(\lambda)}\ .\ R(\lambda) > \frac{m-1}{2} \qquad (2.6)$$

[I(7) का प्रयोग करके]

(2.4) तथा (2.5) का प्रयोग करने पर (2.1) से प्राप्त होगा –

$$\int_{T>0} |T+B|^{-\lambda} f(T)\,dT = \frac{1}{\Gamma_m(\lambda)} \int_{T>0} etr(-BT)\,|T|^{\lambda-(\frac{m+1}{2})} (T)\,dT$$

अतः हमें (2.4) प्राप्त होता है।

पुष्टि : प्रमेय 4 की पुष्टि करने के लिए हम

$$f(T) = |T|^{\mu - (\frac{m+1}{2})} \tag{2.7}$$

लें तो

$$\Psi(P) = \Gamma_m(\mu)|P|^{-\mu} \stackrel{L}{\doteq} |T|^{\mu - (\frac{m+1}{2})}, \; R(\mu) > \frac{m-1}{2}$$

[परिशिष्ट (14) का प्रयोग करके]

तथा

$$G(P) = \frac{\Gamma_m \Gamma_m(\lambda-\mu)}{\Gamma_m(\lambda)}|P|^{\mu-\lambda} \stackrel{L}{\doteq} |T|^{\mu - \frac{m+1}{2}}, R(\mu) > \frac{m-1}{2}, R(\lambda-\mu) > \frac{m-1}{2} \tag{2.8}$$

[परिशिष्ट II(4) का प्रयोग करके]

(2.1) में $\Psi(T) = \Gamma_m(\mu)|T|^{-\mu}$ रखने पर

$$G(P) = \frac{\Gamma_m(\mu)\Gamma_m(\lambda-\mu)}{\Gamma_m(\lambda)}|P|^{\mu-\lambda} \stackrel{L}{\doteq} \frac{\Gamma_m(\mu)}{\Gamma_m(\lambda)}|T|^{\lambda-\mu-\frac{m+1}{2}}$$

$$R(\mu) > \frac{m-1}{2}, \; R(\lambda-\mu) > \frac{m-1}{2}$$

[परिशिष्ट I(4) का प्रयोग करके]

अतः प्रमेय 4 की पुष्टि हो जाती है।

प्रमेय 2.5

यदि $\Psi(P) \stackrel{L}{\doteq} \phi(T)$

तथा

$$G(P) \; \frac{S}{\frac{m+1}{4} - k - \nu} \; \text{etr}(-BT)|T|^{\nu - k(\frac{m+1}{4})}\, \Psi(T)$$

तो

$$G(P) = \Gamma_m\left(\frac{m+1}{4} - k + \nu\right)|P|^{k+\mu-(\frac{m+1}{4})}$$

$$\xi.\left[\,|T+B|^{-(\frac{m+1}{4})-k-\nu}\ {}_2F_0\left(\frac{m+1}{4}-k-\nu,\frac{m+1}{4}-k+\nu;-;-P^{-1}(T+B)^{-1}\right)\varphi(T)\right]$$

$$R(\nu-k)>\frac{m-3}{4} \tag{2.10}$$

बशर्ते कि समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

उपपत्ति : हमें पता है कि

$$\Psi(P)\overset{L}{\underset{\cdot}{=}}\Phi(T) \tag{2.11}$$

तथा $\Gamma_m\left(\frac{m+1}{4}-k+\nu\right)|A|^{-\frac{m+1}{4}+k+\nu}|P+B|^{k-\nu-\frac{m+1}{4}}$

$$\cdot{}_2F_0\left(\frac{m+1}{4}-k+\nu,\frac{m+1}{4}-k+\nu;-;-A^{-1}(P+B)^{-1}\right)\overset{L}{\underset{\cdot}{=}}\text{etr}\,(-BT)$$

$$\cdot|T|^{-\frac{m+1}{4}+k-\nu}|T+A|^{-\frac{m+1}{4}},R(\nu-k)>\frac{m-3}{4} \tag{2.12}$$

[परिशिष्ट I(12)का प्रयोग करने पर]

(2.11) तथा (2.12) में परिणाम (2.1) के व्यवहृत करने पर–

$$\int_{T>0} etr\,(-BT)\,|T|^{-\frac{m+1}{4}-k+\nu}\,|T+A|^{-\frac{m+1}{4}+k+\nu}\,\Psi(T)\,dT$$

$$=\Gamma_m\left(\frac{m+1}{4}+k+\nu\right)|A|^{-\ \frac{m+1}{4}+k+\nu}\int_{T>0}|T+B|^{k-\nu-\frac{m+1}{4}}$$

$$\cdot{}_2F_0\left(\frac{m+1}{4}-k-\nu,\frac{m+1}{4}-k+\nu;-;-A^{-1}(T+B)\right)^{-1}\Phi(T)\,dT$$

अतः प्रमेय तुरन्त प्राप्त होता है।

पुष्टि : प्रमेय 5 की पुष्टि करने के लिए माना कि

$$\Phi(T)=|T|^{\mu-\frac{m+1}{2}} \tag{2.13}$$

तब

$$\Psi(P) = \Gamma_m(\mu)\,|P|^{-\mu} \overset{L}{=} |T|^{\mu-\left(\frac{m+1}{2}\right)},\ R(\mu) > \frac{m-1}{2}$$

[परिशिष्टI(4) का प्रयोग करके]

तथा

$$G(P) = \Gamma_m(\mu)\,\Gamma_m\left(\nu - k - \mu + \frac{m+1}{4}\right) |B|^{-\nu-k-\mu+\frac{m+1}{4}}\ |P|^{k+\nu+\frac{m+1}{4}}$$

$$\cdot {}_2F_0\left(\frac{m+1}{4} - k - \nu, \frac{m+1}{4} + \nu - k - \mu; - B^{-1}P^{-1}\right)$$

$$\underset{\frac{m+1}{4}-k-\nu}{\overset{S}{=\!=}}\ \Gamma_m(\mu)\ etr(-BT)\,|T|^{\nu-k-\mu-\frac{m+1}{4}},\ R(\mu) > \frac{m-1}{2}, R(\nu-k-\mu) > \frac{m-3}{4}$$

[परिशिष्टII(7) का प्रयोग करके]

(2.10) में $\Phi(T) = |T|^{\mu-\frac{m+1}{2}}$ रखने पर

$$G(P) = \Gamma_m\left(\frac{m+1}{4} - k + \nu\right) |P|^{k+\nu-\frac{m+1}{4}}\ \xi\Big[\ |T+B|^{-\frac{m+1}{4}-k-\nu}$$

$$\cdot {}_2F_0\left(\frac{m+1}{4} - k + \nu, \frac{m+1}{4} - k + \nu\ ;\ -\ ;\ - P^{-1}(T+B)^{-1}\right);\ |T|^{\mu-\frac{m+1}{2}}\Big]$$

$$= \Gamma_m\left(\frac{m+1}{4} - k + \nu\,|P|^{k+\nu-\frac{m+1}{4}} \int_{T>0} \Big[\ |T+B|^{-\frac{m+1}{4}+k-\nu}\right.$$

$$\cdot {}_2F_0\left(\frac{m+1}{4} - k - \nu\,,\ -\ \frac{m+1}{4} - k + \nu\ ;\ -\ ;\ - P^{-1}(T+B)^{-1}\right)|T|^{\mu-\frac{m+1}{2}}\ dT$$

$T + B = U \Rightarrow dT = dU$, रखने पर, फिर $Z = U - 1 \Rightarrow dU = |Z|^{-(m+1)}\,dZ$ रखें, पुनः $BZ = V \Rightarrow dZ = |B|^{-\frac{m+1}{2}}\ dV$

इनके क्रमिक क्षेत्र हैं $T > O$, $U > B$, $O < Z < B^{-1}$, $O < V < 1$. मथाई तथा सक्सेना[3] के परिणाम को

$$\int_O^1 |Z|^{\alpha - \frac{m+1}{2}} \, |I-Z|^{\beta - \frac{m+1}{2}} \; {}_rF_s\,(a_1, \ldots\ldots\, a_r;\; b_1, \ldots.., b_s;\; -A\,Z)\, d\,Z$$

$$= \frac{\Gamma_m(\alpha)\,\Gamma_m(\beta)}{\Gamma_m(\alpha+\beta)} \; {}_{r+1}F_{s-1}\;(\alpha, a_1, \ldots., a_r; \alpha+\beta, b_1, \ldots., b_s; -A) \tag{2.15}$$

के रूप में रखने पर

$$G\,(P) = \Gamma_m\left(\nu - k - \mu + \frac{m+1}{4}\right)\Gamma_m(\mu)\,|B|^{-\nu+k+\mu-\frac{m+1}{4}}\,|P|^{k+\nu-\frac{m+1}{4}}$$

$$\cdot\, {}_2F_0\left(\frac{m+1}{4} - k - \nu,\; \frac{m+1}{4} + \nu - k - \mu; -\,;\; -B^{-1}\,P^{-1}\right) \tag{2.16}$$

अतः प्रमेय 2.5 पुष्ट हुई।

प्रमेय 2.6 यदि

$$\Psi\,(P) \stackrel{L}{=} |T|^{\frac{m+1}{2}-\mu}\, f(T) \text{ और } G\,(P) \stackrel{L}{=} f\,(T)$$

तो

$$G(P) = \frac{1}{\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2} + \lambda - \mu\right)}\,\xi\left[\,|T|^{\lambda-\mu}\;{}_1F_1\left(\lambda; \frac{m+1}{2} + \lambda - \mu; -P\,T\right), \Psi\,(T)\right], R\,(\lambda-\mu) > -1 \tag{2.17}$$

बशर्ते कि समाकल पूर्णतया अभिसारी हों।

उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$\Psi\,(P) \stackrel{L}{=} |T|^{\frac{m+1}{2}-\mu}\, f\,(T) \tag{2.18}$$

तथा

$$|P|^{\mu - \frac{m+1}{2}}\,|A-P|^{-\lambda} \stackrel{L}{=} \frac{|T|^{\lambda-\mu}\;{}_1F_1\left(\lambda; \frac{m+1}{2} + \lambda - \mu - A\,T\right)}{\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2} + \lambda - \mu\right)}, R\,(\lambda-\mu) > 1 \tag{2.19}$$

[परिशिष्ट I(10) का प्रयोग करने पर]

परिणाम (2.1) को (3.15) एवं (3.16) में प्रयुक्त करने पर

$$\int\limits_{T>0} |A+T|^{-\lambda} f(T)\, dT = \int\limits_{T>0} \frac{|T|^{\lambda-\mu}\, {}_1F_1\left(\lambda_1; \frac{m+1}{2}+\lambda-\mu - AT\right)}{\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}+\lambda-\mu\right)} \Psi(T)\, dT \,.\, R(\lambda-\mu) > -1$$

अतः हमें (2.17) प्राप्त होता है।

पुष्टि : प्रमेय (2.6) की पुटि करने के लिए हम

$$f(T) = |T|^{\nu - \frac{m+1}{2}} \qquad (2.20)$$

लें तो

$$\Psi(P) = \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}+\nu-\mu\right)|P|-\frac{m+1}{2}-\nu+\mu \stackrel{L}{=} |T^{\nu-\mu},\ R(\nu-\mu) > -1$$

[परिशिष्ट1(4) का प्रयोग करके]

तथा

$$G(P) = \frac{\Gamma_m(\nu)\,\Gamma_m(\lambda-\nu)}{\Gamma_m(\lambda)} |P|^{\nu-\lambda} \stackrel{S}{\overline{\lambda}} |T|^{\nu-\frac{m+1}{2}}, R(\nu) > \frac{m-1}{2}, R(\lambda-\nu) > \frac{m-1}{2} \qquad (2.21)$$

[परिशिष्टII(4) का प्रयोग करके]

(3.14) में $\Psi(T) = \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}+\nu-\mu\right)|T|^{-\frac{m+1}{2}-\nu+\mu}$ रखने पर

$$G(P) = \frac{1}{\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}+\lambda-\mu\right)} \xi\left[|T|^{\lambda-\mu}\, {}_1F_1\left(\lambda; \frac{m+1}{2}-\lambda-\mu; -PT\right); \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}+\nu-\mu\right).|T|^{-\frac{m+1}{2}-\nu+\mu}\right]$$

$$= \frac{\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}+\nu-\mu\right)}{\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}+\lambda-\mu\right)} \int\limits_{T>0} |T|^{\lambda-\nu-\frac{m+1}{2}}\, {}_1F_1\left(\lambda; \frac{m+1}{2}+\lambda-\mu; -PT\right) dT$$

$PT = U \Rightarrow dt = |P|-\frac{m+1}{2} dU$ रखने तथा मथाई और सक्सेना[3] के परिणाम को

$$\int_{Z>0} |Z|^{p-\frac{m+1}{2}} {}_pF_q\left(a_1, \ldots\ldots, a_p ; b_1, \ldots\ldots b_q, \ldots.. ; -Z\right) dZ$$

$$= \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma_m\left(a_j - \rho\right) \Gamma_m(\rho)}{\prod_{j=1}^{q} \Gamma_m\left(b_j - \rho\right)} \quad \frac{\prod_{j=1}^{q} \Gamma_m\left(b_j\right)}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma_m\left(a_j\right)} \tag{2.22}$$

के रूप में प्रयुक्त करने पर

$$G(P) = \frac{\Gamma_m(\nu)\,\Gamma_m(\lambda-\nu)}{\Gamma_m(\lambda)} \,|P|^{\nu-\lambda} \,.\, R(\nu) > \frac{m-1}{2},\; R(\lambda-\nu) > \frac{m-1}{2} \tag{2.23}$$

इस तरह प्रमेय (2.6) की पुष्टि होती है।

3. **सम्प्रयोग** : प्रमेयों के सम्प्रयोग से हम मैट्रिक्स चर को समाकल व्युत्पन्न कर सकते हैं जो साहित्य में प्राप्त भी नहीं हैं।

3.1 प्रमेय 2.4 का सम्प्रयोग : यदि हम

$$f(T) = etr(-BT)\,|T|^{\alpha-\left(\frac{m+1}{2}\right)} \tag{3.1}$$

लें तो

$$\Psi(P) = f\Gamma_m(\alpha)\,|B+P|^{-\alpha} \stackrel{L}{=} etr(-BT)|T|^{\alpha-(m+1)/2}\; R(\alpha) > \frac{m-1}{2} \tag{3.2}$$

[परिशिष्ट((7) का प्रयोग करने पर]

तथा

$$G(P) = \Gamma_m(\alpha)\,|B|^{-\alpha}\,|P|^{-\lambda}\,{}_2F_0\left(\lambda, \alpha; -; -B^{-1}P^{-1}\right)$$
$$\stackrel{S}{\overline{\lambda}}\, etr(-BT)\,|T|^{\alpha-\frac{m-1}{2}}\, R(\alpha) > \frac{m-1}{2} \tag{3.3}$$

[परिशिष्ट II(7) का प्रयोग करने पर]

$f(T)$, $\Psi(P)$ एवं $G(P)$ के उपर्युक्त मान के लिए प्रमेय (4) को व्यवहृत करने पर

$$\frac{1}{\Gamma_m(\lambda)} \int_{T.0} \text{etr}\;(-PT)\,(B+T)^{-\alpha}\,|T|^{\lambda-\frac{m+1}{2}}\; dT = |B|^{-\alpha}\;||P|^{-\lambda}$$

$${}_2F_0\left(\lambda, \alpha; -, -, B^{-1}P^{-1}\right) R(\alpha) > \frac{m-1}{2} \tag{3.4}$$

(3.2) प्रमेय 2.6 का सम्प्रयोग : यदि हम

$$f(T) = H^{m.n}_{p.q}\left[A\,T\left|\begin{matrix}(a_1, A_1)\ldots\ldots(a_p, A_p)\\(b_1, B_1)\ldots\ldots(b_q, B_q)\end{matrix}\right.\right] \quad (3.5)$$

लें तो

$$\Psi(P) = P^{\mu} H^{m, n+1}_{p+1.q}\left[A\,P^{-1}\left|\begin{matrix}\left(\mu - \frac{m+1}{2}, 1\right).(a_1 . A)\ldots\ldots(a_p . A_p)\\(b_1 . B_1)\ldots\ldots(b_q . B_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\stackrel{L}{=} |T|^{\frac{m+1}{2}-\mu} H^{m.n}_{p.q}\left[A\,T\left|\begin{matrix}(a_1 . A_1)\ldots\ldots(a_p, A_p)\\(b_1 . B_1)\ldots\ldots(b_q, B_q)\end{matrix}\right.\right].$$

$$R\left[\frac{m+1}{2} - \mu + \min\frac{b_1}{B_1}\right] > \frac{m-1}{2}\,(j = 1 \ldots\ldots m) \quad (3.6)$$

[परिशिष्ट I(17) का प्रयोग करने पर]

तथा

$$G(P) = \frac{|P|^{\frac{m+1}{2}-\lambda}}{\Gamma_m(\lambda)} H^{m+1.n+1}_{p+1.q+1}\left[P\,A\left|\begin{matrix}(0.1).(a_1 . A_1)\ldots\ldots(a_p . A_p)\\\left(\lambda - \frac{\nu+1}{2}\right).(b_1 . B_1)\ldots\ldots(b_q . B_q)\end{matrix}\right.\right]$$

$$\stackrel{S}{\overline{\lambda}} H^{m.n}_{p.q}\left[A\,T\left|\begin{matrix}(a_1 . A_1)\ldots\ldots(a_p, A_p)\\(b_1 . B_1)\ldots\ldots(b_q, B_q)\end{matrix}\right.\right] . \; R(\lambda) > \frac{m-1}{2}.$$

$$R\left(\min\frac{b_1}{B_1}\right) > \frac{m-1}{2}\;(j = 1 \ldots\ldots\ldots m) \quad (3.7)$$

[परिशिष्ट II(13) का प्रयोग करने पर]

$f(T)$, $\Psi(P)$ एवं $G(P)$ के उपर्युक्त मानों के लिए प्रमेय 2.6 को व्यवहृत करने पर

$$\int_{T>0} |T|^{\lambda}\; {}_1F_1\left(\lambda;\, \frac{m+1}{2} + \lambda - \mu;\, -PT\right)$$

$$H^{m.n+1}_{p+1.1}\left[A\,T^{-1}\left|\begin{matrix}\left(\mu - \frac{m+1}{2} . 1\right).(a_1 . A_1)\ldots\ldots(a_p . A_p)\\(b_1 . B_1)\ldots\ldots(b_q . B_q)\end{matrix}\right.\right] dT$$

$$= \frac{\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}+\lambda-\mu\right)}{\Gamma_m(\lambda)} \, |P|^{\frac{m+1}{2}-\lambda} \, H^{m+1 . n+1}_{p+1 . q+1}$$

$$\left[A P \left| \begin{matrix} (0.1) . \left(a_1 . A_1\right) \cdots\cdots \left(a_p . A_p\right) \\ \left(\lambda - \frac{m+1}{2}, 1\right) . \left(b_1 . B_1\right) \cdots\cdots \left(b_q . B_q\right) \end{matrix} \right. \right].$$

$$R(\lambda) > \frac{m-1}{2} . \; R\left(-\mu + \min \frac{b_1}{B_1}\right) > -1 . \; (j = 1. \, \ldots\ldots\ldots . \, m) \qquad (3.8)$$

मैट्रिक्स आर्गुमेंट के H-फलन के अस्तित्व के प्रतिबन्ध तथा अन्य विवरणों के लिए देखें मथाई[2]।

इसी प्रकार हम परिशिष्ट I तथा II का प्रयोग करके शेष प्रमेयों के सम्प्रयोग को व्युत्पन्न कर सकते हैं।

मैट्रिक्स चर के समाकल रूपान्तरों की सारणी तैयार करने में जिन फलनों ता समाकल को प्रयुक्त किया गया है उनकी परिभाषाओं के लिए पाठक मथाई [2] एवं मथाई तथा सक्सेना [3] को देखें।

निर्देश

1. कुम्भट, आर. के. तथा भंडारी, अंजना : गणित सन्देश, 1973, 7(2), 67-70.
2. मथाई, ए. एम. : A handbook of Generalised Special Functions for Statistical Function and Physical Sciences', आक्सफोर्ड यूनि. प्रेस, आक्सफोर्ड (1993).
3. मथाई, ए. एम. : The *H*-fuction with Application in Statistics and Other Disciplines, जान विले एण्ड सन्स, न्यूयार्क (1978).
4. सक्सेना, आर. के. : Proc. Nat. Inst. Sci., India, Part A, 1959, **25**, 340-355.
5. सक्सेना, आर. के. : Proc. Nat. Inst. Sci., India, Part A, 1959, **25**, 166-170.
6. सक्सेना, आर. के. : Proc. Nat. Inst. Sci., India, Part A, 1960, **26**, 400-413.

परिशिष्ट I

मैट्रिक्स चरों के लाप्लास रूपान्तर की तालिका

	$F(T)$	$\Phi(P) = \int_{T>0} etr(-PT)\, f(T)\, dt$
1.	$f(T)$	$\Phi(P)$
2.	$f(AT)$	$\Phi\left(A^{-\frac{1}{2}} P A^{-\frac{1}{2}}\right)$
3.	I	$\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right) \lvert P \rvert^{-\frac{m+1}{2}}$
4.	$\lvert T \rvert^{\alpha-\frac{m+1}{2}}\ R(\alpha) > \frac{m-1}{2}$	$\Gamma_m(\alpha) \lvert P \rvert^{-\alpha}$
5.	$etr(-BT)$	$\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right) \lvert B+P \rvert^{-\frac{m+1}{2}}$
6.	$etr(BT)$	$\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right) \lvert P-B \rvert^{-\frac{m+1}{2}}$
7.	$etr(-BT) \lvert T \rvert^{\alpha}$, $R(\alpha) > \frac{m-1}{2}$	$\Gamma_m(\alpha) \lvert B+P \rvert^{-\alpha}$
8.	$etr(BT) \lvert T \rvert^{\alpha-\frac{m+1}{2}}$, $R(\alpha) > \frac{m-1}{2}$	$\Gamma_m(\alpha) \lvert P-B \rvert^{-\alpha}$
9.	${}_pF_q(a_1, \ldots\ldots, a_p : b_1 ; \ldots\ldots, b_p ; -AT)$	$\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right) \lvert P \rvert^{-\frac{m+1}{2}}\ {}_{p+1}F_q\left(a_1, \ldots, a_p, \frac{m+1}{2}; b_1, \ldots, b_q; -AP^{-1}\right)$
10.	$\lvert T \rvert^{\gamma-\frac{m+1}{2}}\ {}_pF_q(a_1, \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; -AT)\ R(\gamma) > \frac{m-1}{2}$	$\Gamma_m(\gamma) \lvert P \rvert^{-\gamma}\ {}_{p+1}F_q(a_1, \ldots, a_p, \gamma; b_1, \ldots, b_q; -AP^{-1})$
11.	$etr(-BT)\ {}_pF_q(a_1, \ldots, a_p ; b_1, \ldots, b_q ; -AT)$	$\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right) \lvert B+P \rvert^{-\frac{m+1}{2}}\ {}_{p+1}F_q(a_1, \ldots, a_p, \frac{m+1}{2}; b_1, \ldots, b_q; -A(B+P)^{-1}$

	F (T)	$\Phi(P) = \int_{T>0} etr(-PT)\, f(T)\, dt$
12.	$etr(-BT)\,\lvert T\rvert^{\gamma-\frac{m+1}{2}}\, {}_pF_q(a_1 \ldots, a_p; b_1, \ldots, b_q; -AT) R(\gamma) > \frac{m-1}{2}$	$\Gamma_m(\gamma)\,\lvert B+P\rvert^{-\gamma}\, {}_{p+1}F_q(a_1, \ldots, a_p, \frac{m+1}{2}; b_1, \ldots, b_q; -A(B+P)^{-1})$
13.	$G^{p.q}_{p.q}\left[\lvert AT\rvert \begin{matrix} a_1 & a_1 \\ b_1 & b_s \end{matrix}\right],\ R(\min b_j) > \frac{m-1}{2},\ (j = 1 \ldots p)$	$\lvert P\rvert^{-\frac{m+1}{2}}\, G^{p.q+1}_{r+1.s}\left[\lvert AP^{-1}\rvert \begin{matrix} 0, a_1 & a_r \\ b_1 & b_s \end{matrix}\right]$
14.	$\lvert T\rvert^{-\alpha-\frac{m+1}{2}}\, G^{p.q}_{r.s}\left[\lvert AT\rvert \begin{matrix} a_1 & a_r \\ b_1 & b_s \end{matrix}\right],\ R(-\alpha + \min b_j) > \frac{m-1}{2},\ (j = 1 \ldots p)$	$\lvert P\rvert^{\alpha}\, G^{p.q+1}_{r+1,s}\left[\lvert AP^{-1}\rvert \begin{matrix} \frac{m+1}{2}+\alpha, a_1 & a_r \\ b_1 & b_s \end{matrix}\right]$
15.	$etr(-BT)\, G^{p.q}_{r.s}\left[\lvert AT\rvert \begin{matrix} a_1 & a_r \\ b_1 & b_s \end{matrix}\right],\ R(\min b_j) > \frac{m-1}{2},\ (j = 1 \ldots p)$	$\lvert B+P\rvert^{-\frac{m+1}{2}}\, G^{p.q+1}_{r+1,s}\left[\lvert A(B+P)^{-1}\rvert \begin{matrix} 0. a_1 & a_r \\ b_1 & b_s \end{matrix}\right]$
16.	$\lvert T\rvert^{\alpha-\frac{m+1}{2}}\, etr(-BT)\, G^{p.q}_{r.s}\left[\lvert AT\rvert \begin{matrix} a_1 & a_r \\ b_1 & b_s \end{matrix}\right],\ R(-\alpha + \min b_j) > \frac{m-1}{2},\ (j = 1 \ldots p)$	$\lvert B+P\rvert^{\alpha}\, G^{p.q+1}_{r+1,s}\left[\lvert A(B+P)^{-1}\rvert \begin{matrix} \frac{m+1}{2}+\alpha, a_1 & a_r \\ b_1 & b_s \end{matrix}\right]$
17.	$\lvert T\rvert^{-\alpha+\frac{m+1}{2}}\, H^{m.n}_{p.q}\left[\lvert AT\rvert \begin{matrix} (a_1.A_1) & (a_p.A_p) \\ (b_1.B_1) & (b_q.B.B_q) \end{matrix}\right],\ R(-\alpha + \min \frac{b_j}{B_j}) > \frac{m-1}{2},\ (j = 1 \ldots m)$	$\lvert P\rvert^{\alpha}\, H^{m.n+1}_{p+1.q}\left[\lvert AP^{-1}\rvert \begin{matrix} (\alpha - \frac{m+1}{2}.1).(a_1.A_1) \ldots (a_p.A_p) \\ (b_1.B_1) \ldots (b_q.B_q) \end{matrix}\right]$
18.	$C_k(T)$	$\lvert P\rvert^{-\frac{m+1}{2}}\, C_k(P^{-1})\, \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}, K\right)$
19.	$C_k(T)\,\lvert T\rvert^{\rho-\frac{m+1}{2}},\ R(\rho) > \frac{m-1}{2}$	$\lvert P\rvert^{-\rho}\, C_k(P^{-1})\, \Gamma_m(\rho.K)$
20.	$C_k(AT)$	$\lvert P\rvert^{-\frac{m+1}{2}}\, C_k(AP^{-1})\, \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}, K\right)$
21.	$\lvert T\rvert\ \rho - \frac{m+1}{2} C_k - AT,\ R(\rho) > \frac{m-1}{2}$	$\lvert P\rvert^{-\rho}\, C_k(AP^{-1})\, \Gamma_m(\rho.K)$

परिशिष्ट -II

मैट्रिक्स चरों के स्टील्जे रूपान्तर की तालिका

	F(T)	$G^{\lambda}(T) = \int_{T>0} \|P+T\|^{-\lambda} f(T)\,dt,\ R\,d(\lambda) > \frac{m-1}{2}$
1.	$f(T)$	$G^{\lambda}(P)$
2.	$f(AT)$	$\|A\|^{\lambda-\frac{m+1}{2}} G^{\lambda}\left(A^{\frac{1}{2}} P A^{\frac{1}{2}}\right)$
3.	$\|T\|^{-\lambda+\frac{(m+1)}{2}} f(T^{-1})$	$\|P\|^{-\lambda} G(P^{-1})$
4.	$\|T\|^{-\frac{m-1}{2}}.\ R(\nu) > \frac{m-1}{2}$	$\frac{\Gamma_m(\nu)\Gamma_m(\lambda-\nu)}{\Gamma_m(\lambda)} \|P\|^{\nu-\lambda},\ R(\lambda-\nu) > \frac{m-1}{2}$
5.	$\|T\|^{\nu-\frac{m+1}{2}} \|A+T\|^{-\mu}.R(\nu) > \frac{m-1}{2}, R(\lambda+\mu-\nu) > \frac{m-1}{2}$	$\frac{\Gamma_m(\nu)\Gamma_m(\lambda-\nu)}{\Gamma_m(\lambda+\mu)} \|P\|^{\nu-\lambda} \|A\|^{\mu}.\ {}_2F_0(\nu,\ \mu; \lambda+\mu; I-PA^{-1})$
6.	$etr(-BT)$	$\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right) \|B\|^{-\frac{m+1}{2}} {}_2F_0\left(\lambda,\ \frac{m+1}{2}; -; B^{-1}P^{-1}\right)$
7.	$etr(-BT)\|T\|^{\nu-\frac{m+1}{2}}, R(\nu) > \frac{m-1}{2}$	$\Gamma_m(\nu)\|B\|^{-\nu}\|P\|^{-\lambda} {}_2F_0\left(\lambda,\ \nu; -; -B^{-1}P^{-1}\right)$
8.	$\|T-A\|^{-\frac{m+1}{2}}, T > A$ O, अन्यत्र	$\frac{\Gamma_m\left(\lambda-\frac{m+1}{2}\right)\Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma_m(\lambda)} \|P+A\|^{-\frac{m+1}{2}},\ P(\lambda) > m$

9.	$\lvert T-A\rvert^{\gamma-\frac{m+1}{2}}, T>A, R(\gamma)>\frac{m-1}{2}$ O, अन्यत्र	$\lvert P+A\rvert^{\gamma-\lambda}\frac{\Gamma_m(\lambda-\gamma)\,\Gamma_m(\gamma)}{\Gamma_m(\lambda)},\ R(\lambda-\gamma)>\frac{m-1}{2}$
10.	$\lvert T-A\rvert^{\mu-\frac{m+1}{2}}\,\mathrm{etr}(-AT^{-1}), R(\lambda-u)>\frac{m-1}{2}$	$\Gamma_m(\lambda-\mu)\lvert A\rvert^{\mu-\gamma}\,{}_2F_0\left(\lambda,\lambda-\mu;-;-A^{-1}P\right)$
11.	$G^{m.n}_{p.q}\left[\lvert AT\rvert\begin{matrix}a_1 & a_p\\ b_1 & b_q\end{matrix}\right], R(\min b_j)>-1, (j=1,\ldots,n)$	$\lvert P\rvert\frac{^{\frac{m+1}{2}-\lambda}}{\Gamma_m(\lambda)}G^{m+1.n+1}_{p+1.q+1}\left[\lvert PA\rvert\begin{matrix}0, a_1, \ldots a_p\\ \lambda, \frac{m+1}{2},\ldots b_q\end{matrix}\right]$
12.	$\lvert T\rvert^{\mu-\frac{m+1}{2}}G^{m.n}_{p.q}\left[\lvert AT\rvert\begin{matrix}a_1 & a_p\\ b_1 & b_q\end{matrix}\right], R(u+\min b_j)>\frac{m-1}{2}, (j=1,\ldots,n)$	$\frac{\lvert P\rvert^{\mu-\lambda}}{\Gamma_m(\lambda)}G^{m+1.n+1}_{p+1.q+1}\left[\lvert PA\rvert\begin{matrix}\frac{m+1}{2}-\mu, a_1, \ldots a_p\\ \lambda, \mu, \ldots b_1, b_q\end{matrix}\right]$
13.	$H^{m.n}_{p.q}\left[\lvert AT\rvert\begin{matrix}(a_1 .. A_1) & (a_p .. A_p)\\ (b_1 .. B_1) & (b_q .. B_q)\end{matrix}\right], R(\min b_j)>-1, (j=1,\ldots,n)$	$\lvert P\rvert\frac{^{\frac{m+1}{2}-\lambda}}{\Gamma_m(\lambda)}H^{m+1.n+1}_{p+1.q+1}\left[\lvert PA\rvert\begin{matrix}(0.1), & (a.A) \ldots (a_p.A_p)\\ \left(\lambda-\frac{m+1}{2},\right) & (b.B) \ldots (b_q.B_q)\end{matrix}\right]$

इस मैट्रिक्स कर के समाकल रूपान्तरों की सारणी तैयार करने में जिन फलनों तथा समाकल को प्रयुक्त किया गया है उनकी परिभाषा के लिए पाठक मथाई[2] एवं मथाई तथा सक्सेना[3] देखें।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.2, April, 2000.

जल में प्रक्षेप्य-गमन और पिंड का ऊर्ध्वाधर अवरोह

एस. के. गुर्टू तथा जे. एस. सिक्का

पद्धति अध्ययन एवं विश्लेषण संस्थान, मेटकाफ हाउस, दिल्ली-54

[प्राप्त—फरवरी 11, 2000]

सारांश

जल वातावरण में प्रक्षेप्य के गमन के लिए द्वितीय कोटि अवकल समीकरण स्थापित किये गये हैं, जिनको रंगे-कुट्टा-नाइस्ट्रोम विधि से हल किया गया है। प्रक्षेप्य की अनुप्रस्थ दूरी, ऊँचाई, अनुप्रस्थ से कोण और गति का समय के साथ परिवर्तन का पता किया गया है। वह विदित होता है कि प्रक्षेप्य जल में कम अनुप्रस्थ दूरी तक ही जा पाता है। फलस्वरूप एक आयुध के रूप मे इसका प्रयोग संभव नहीं है। एक सम्बधित स्थिति-टारपीडो या उपकरण का ऊर्ध्वाधर तल में गिरने का भी अध्ययन किया गया है। वस्तु पर लगने वाले प्रतिरोध बल को वेग के वर्ग के समानुपाती मानने पर अवकल समीकरण का वैश्लेषिक हल दिया गया है।

Abstract

Underwater motion of projectile and verical descent of torpedo. *By* S. K. Gurtu and J. S. Sikka, I.S.S.A., Metcalf House, Delhi 110 054.

The second-order differential equations of motion of a projectile in an underwater environment have been formulated and numerically solved by Runge-Kutta-Nystrom method. The variation of the projectile's horizontal distance, height, angle with the horizontal and velocity with increasing time has been studied. It is concluded that low range in water environment inhibits its use as a potential weapon. As an off-shoot to the above problem, the solution of the DE for the vertical descent of a malfunctioning torpedo or equipment sinking in water

medium has been obtained. Closed–form analytic solution, for velocity and distance, when drag force varies as square of velocity, has been derived and presented in a tabular manner.

1. प्रस्तावना

एक व्यावहारिक समस्या होन के कारण तोप के गोले या बंदूक की गोली का वायुमंडल में गमन का विभिन्न पहलुओं से अध्ययन काफी समय से और व्यापक रूप से किया गया है। परन्तु प्रक्षेप्य के जलीय माध्यम में गमन का अध्ययन अधिक नहीं हुआ है, क्योंकि यह घटना इतनी आम नहीं है। इस प्रपत्र में हम वायुमंडल के स्थान पर जल में पिंड के गमन पर विचार करेंगे और प्रयत्न करेंगे कि कुछ ऐसा निष्कर्ष निकालें जिसका महत्व जलीय माध्यम में गोलंदाज़ी में हो।

गमन के अवकल समीकरण

जल के माध्यम में प्रक्षेपित पिंड पर जिसका भार W, उत्प्लावन बल B और माध्यम का अवरोध बल $R = kv^2$ हो, लगने वाले बलों को अनुप्रस्थ और ऊर्ध्वाधर दिशा में विघटन करने पर निम्नलिखित अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं :-

$$\frac{(W - B)}{g} \ddot{x} = - kv^2 \cos\theta \tag{1}$$

और

$$\frac{(W - B)}{g} \ddot{y} = - kv^2 \sin\theta - (W - B) \tag{2}$$

जहाँ

g गुरुत्वाकर्षण का त्वरण, और क्रमशः $\ddot{x}$ और $\ddot{y}$ दिशाओं में त्वरण हैं (x, $\dot{x}$ और y, $\dot{y}$) x और y दिशाओं में क्रमशः दूरी व वेग हैं),

k एक अवरोध स्थिरांक है, v वेग है और θ अनुप्रस्थ दिशा से बना कोण है।

पुनः यदि $w = mg$, $B = m_b g$ और $R = \frac{k}{m - m_b}$ का उपभोग अवकल समीकरणों में किया जाए तो उनको निम्नवत् प्रतिरूपित किया जा सकता है :-

$$\ddot{x} = R v \dot{x} \tag{3}$$

$$\ddot{y} = R v \dot{y} - g \tag{4}$$

उपर्युक्त समीकरणों में $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2$ और $\theta = \text{arc} \tan\left(\frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$ लिखने पर उनका हल रंगे–कुट्टा–नाइस्ट्रोंम विधि से किया जा सकता है, जब कि विभिन्न स्थिरांकों[1, 2] के मान हैं :

$$g = 9.8 \, m/s^2 \qquad m_b = 1.043 \, kg,$$

$$k = .637 \, kg/m, \qquad m = 11.34 \, kg,$$

$$x(0) = 0 \, m, \qquad y(0) = 0 \, m,$$

और $$v = 237.74 \, m/s$$

पिंड द्वारा तै की गई महत्तम अनुप्रस्थ दूरी एवं महत्तम ऊर्ध्वाधर दूरी या ऊँचाई का प्रक्षेप्य कोण के साथ किस प्रकार बदलाव होता है, यह सारणी 1 में प्रदर्शित किया गया है। अवलोकन से पता लगता है कि महत्तम अनुप्रस्थ दूरी प्रक्षेप्य कोण के साथ बढ़ती है परन्तु कुछ समय पश्चात् उसका घटना आरम्भ हो जाता है परन्तु महत्तम ऊँचाई प्रक्षेप्य कोण के साथ बढ़ती ही जाती है।

सारणी 1

महत्तम ऊँचाई और महत्तम अनुप्रस्थ दूरी का प्रक्षेप्य कोण के साथ परिवर्तन

प्रक्षेप्य कोण (degrees)	महत्तम ऊँचाई (m)	महत्तम ऊँचाई का समय (s)	महत्तम अनुप्रस्थ दूरी (m)	महत्तम अनुप्रस्थ दूरी का समय (s)
10	5.29	0.68	52.57	1.90
20	12.25	1.02	56.34	2.91
30	19.51	1.24	55.45	3.76
40	26.57	1.42	51.55	4.51
50	33.02	1.59	45.22	5.17
60	38.52	1.72	36.74	5.73
70	42.77	1.83	26.24	6.15
80	45.48	1.91	13.87	6.42
90	46.42	1.94	0.00	6.52

पिंड द्वारा तै की गई अनुप्रस्थ दूरी, ऊँचाई, अनुप्रस्थ से कोण, और वेग का समय के साथ परिवर्तन सारणी 2 मे दिये गये हैं, जब उसका प्रक्षेप्य कोण 23° है (इस कोण पर महत्तम अनुप्रस्थ दूरी प्राप्त होती है)।

सारणी 2

प्रक्षेप्य पैरामीटरों का परिवर्तन (प्रक्षेप्य कोण 23°)

समय, t (s)	अनुप्रस्थ दूरी x (m)	ऊँचाई y (m)	अनुप्रस्थ दिशा से कोण, θ (degrees)	वेग (s) (m/s)
0	0	0	23.00	237.74
.25	22.46	9.33	21.40	49.18
.50	30.96	12.41	17.64	27.28
.75	36.39	13.86	11.52	18.69
1.00	40.41	14.40	2.91	14.25
1.25	43.62	14.27	– 7.99	11.76
1.50	46.30	13.61	– 20.32	10.47
1.75	48.57	12.48	– 32.65	9.96
2.00	50.51	10.94	– 43.72	9.95
2.25	52.18	9.06	– 52.95	10.21
2.50	53.00	6.88	– 60.34	10.59
2.75	54.81	4.47	– 66.18	10.98
3.00	55.83	1.87	– 70.77	11.34
3.17	56.43	0.02	– 73.34	11.55

सारणी 2 को देखने से पता लगता है कि जैसे–जैसे समय बढ़ता है वैसे–वैसे अनुप्रस्थ दूरी बढ़ती है। समय के बढ़ने के साथ ऊँचाई भी बढ़ती है और फिर महत्तम ऊँचाई प्राप्त होने के बाद उसका घटना आरम्भ हो जाता है। इसी प्रकार, समय के साथ अनुप्रस्थ दिशा से कोण घटता है, फिर शून्य होता है और फिर ऋृणात्मक हो जाता है। पिंड का वेग समय के साथ–साथ घटता है, उसका न्यूनतम मान महत्तम ऊँचाई पर आता है और बाद में वह बढ़ता है।

स्थिरांक k का अपना महत्व है, जो माध्यम पर निर्भर है। यदि k का मान 1, .1, .01, .001 और .0001 kg/m लें, तो महत्तम अनुप्रस्थ दूरी क्रमशः 37.91, 264.77, 1338.25, 3286.68 और 4038.19 m होगी। यदि $R = 0$ लें, तो पिंड का पथ एक परवलय आता है। हमें यह बात भली–भाँति विदित है कि निर्वात में पथ परवलय ही होता है। R का ऋणात्मक मान स्वयं प्रणोदित स्थिति को इंगित करता है।

सारणी 1 या 2 को सरसरी तौर से देखने पर पता चलता है कि विभिन्न चरों का समय के साथ परिवर्तन आशानुकूल ही है। एक प्रमुख तथ्य जो कि सामने आता है वह यह कि प्रक्षेप्य की

महत्तम अनुप्रस्थ दूरी 56 m है (जो 23° के प्रक्षेप्य कोण पर प्राप्त होती है), जो गहरे समुद्र के भीतर युद्ध के लिये अपर्याप्त है। इस कारण जल में ऐसे आयुध के प्रयोग की संभावनायें गौण हैं, जबकि वायुमंडल में अनुप्रस्थ दूरी 100 गुना अधिक होने के कारण इनका प्रयोग वांछनीय और व्यावहारिक है। जल में स्वयं प्रणोदित आयुध, जैसे टारपीडो या मिसाइल का प्रयोग ही उचित है। परन्तु यदि कम दूरी को ध्यान में रख कर इस क्षेत्र के अध्ययन में ढिलाई दी जाये तो यह उचित नहीं होगा। हमें यह नहीं भूलना चाहिये कि समुद्र का माध्यम एक गतिशील माध्यम है और गूढ़ता से भरा पड़ा है। तीव्र गति से विचरण करती समुद्री धारायें, जो सतही वायु और जल के बदलते घनत्व से उत्पन्न होती हैं, उनके प्रभाव को भी समझा जा सकता है। केवल समीकरणों में थोड़े बदलाव की आवश्यकता है।

पानी में ऊर्ध्वाधर अवरोह का अवकल समीकरण

ऊपर वर्णित समस्या से मिलती–जुलती समस्या है एक पिंड का ऊर्ध्वाधर अवरोध या उसका गुरुत्वाकर्षण के प्रभाव से जल में गिरना। यह पिंड जहाज़ से गिरा कोई उपकरण हो सकता है या वह जानबूझ कर भी गिराया जा सकता है। इस प्रकार की स्थिति में यह विचार करना महत्वपूर्ण हो जाता है कि वह समुद्र तल से टकराने पर टूटेगा या नहीं ? वस्तु जब तक सही सलामत है जब तक तल से टकराने का वेग Vcrit से कम रहे। पानी में ऊर्ध्वाधर अवरोह के लिए अवकल समीकरण है :

$$m\frac{dv}{dt} = W - B - kv^2, \qquad v(0) = 0 \tag{5}$$

यदि $a = \frac{W - B}{m}$ और, $b = \frac{k}{m}$ तो

$$t = \int_0^{v_{crit}} \frac{dv}{a - bv^2} \tag{6}$$

इस समाकल का हल हुआ

$$t = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}v}{\sqrt{a} - \sqrt{b}v}\right) \tag{7}$$

यदि v को t के फलन से निरूपित किया जाये

$$v = \frac{dy}{dt} = \frac{\sqrt{a}\left(e^{2\sqrt{ab}t} - 1\right)}{\sqrt{b}\left(e^{2\sqrt{ab}t} + 1\right)}, \qquad y(0) = 0 \tag{8}$$

जहाँ y गहराई है।

इसी समीकरण का समाकलन करने पर

$$y = \sqrt{\frac{a}{b}}\,t + \frac{1}{b}\ln\left(\frac{i + e^{-2\sqrt{abt}}}{2}\right) \qquad (9)$$

बेग v और गहराई y का समय t का बदलाव क्रमशः समीकरण (8) और (9) में दिया गया है जिसको सारणी 3 में दिखाया गया है।

सारणी 3

ऊर्ध्वाधर अवरोह के लिये वेग और गहराई का समय के साथ परिवर्तन (जब अवरोध बल वेग के समानुपाती वजन वह वेग के वर्ग के समानुपाती है)

समय (s)	अवरोध बल = kv		अवरोध बल = kv^2	
	वेग (m/s)	गहराई (m)	वेग (m/s)	गहराई (m)
0	0	0	0	0
2	1.42	1.42	1.42	1.42
4	2.84	5.68	2.82	5.67
6	4.24	12.76	4.18	12.69
8	5.64	22.65	5.48	22.35
10	7.03	35.33	6.70	34.54
12	8.42	50.78	7.83	49.08
14	9.79	68.98	8.87	65.79
16	11.16	89.94	9.81	84.48
18	–	–	10.65	104.96
20	–	–	11.40	127.03

सारणी को देखने से पता लगता है कि वेग और गहराई दोनों, समय के साथ, बढ़ते हैं। प्रयुक्त आरम्भिक स्थिरांक हैं :

$W = 2254$ newtons, $B = 2090$ newtons और $v_{crit} = 12$ m/s. ।

हमने अवरोध को पहले वेग के समानुपाती लिया है, फिर मिलान हेतु उसे वेग के वर्ग के समानुपाती लिथा है।

कृतज्ञता–ज्ञापन

लेखकगण श्री एस. सी. जेठी, निदेशक आई.एस.एस.ए. (ईसा) को इस शोध–पत्र के प्रकाशन हेतु आज्ञा प्रदान करने और श्रीमती भूपेन्द्र भारद्वाज को संगणक सहायता के लिये धन्यवाद देना चाहेंगे।

निर्देश

1. स्कारबोरो, जे. बी. : Numerical Mathematical Analysis. Oxford & IBH Publishing Co., Calcutta, 1968 : p. 371–390.

2. क्रेज़िग, ई : Advanced Engineering Mathematics. John Wiley & Sons, New York, 1972 : p. 840.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.2, April, 2000.

आई एस ओ 9000 गुणवत्ता प्रबन्ध पद्धति–एक दृष्टिकोण

महेश कुमार शर्मा
यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान, देहरादून (उ० प्र०)

[प्राप्त–फरवरी 16, 2000]

सारांश

गुणता प्रबन्ध पद्धति आई एस ओ 9000 श्रृंखला, किसी संगठन में, गुणता पर प्रभाव डालने वाली सभी कार्यकलापों का प्रबन्धन करने के लिए होती है। आई एस ओ 9000 मानकों को लागू करने से गुणता, दक्षता तथा उत्पादकता स्वयं परिचालित हो जाती हैं। प्रस्तुत प्रपत्र में प्रबन्ध पद्धति आई एस ओ 9000 श्रृंखला के बारे में सविस्तार व्याख्या की गई है। आई एस ओ 9000 के विषय में क्या और क्यों तथा विकास एवं गुणता पद्धति–विचारधारा का विवरण समाविष्ट किया गया है। आई एस ओ 9000 मानकों की संरचना, लाभ तथा प्रभाव के बारे में वर्णन किया गया है।

Abstract

ISO 9000 Quality Management System—An overview. *By* Mahesh Kumar Sharma, Instruments Research and Development Establishment, Dehra Dun (U. P.)

ISO 9000 series of quality management system are for managing all activities in an organisation that affect quality. With the implementation of ISO 9000 standards, quality, efficiency and productivity become self-driven. Present paper describes in details about the ISO 9000 series of quality management system. The description of what and why and evolution of ISO 9000 and concept of quality system have been included. An account of structure, advantages and impact of ISO 9000 standards have been discussed.

प्रस्तावना

1995 में अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार के क्षेत्र में काफी अधिक विस्तार हुआ और यह प्रवृत्ति अभी भी जारी है।[1] इस प्रगति का श्रेय विश्व व्यापार संगठन को दिया जा सकता है जिसने केन्द्रीय आर्थिक योजना की विचारधारा को ध्वस्त करके बाजारोन्मुखी सुधारों का विस्तार करके क्षेत्रीय एकीकरण को बढ़ावा दिया तथा आर्थिक प्रणाली के अन्तर्राष्ट्रीयकरण को प्रोत्साहित किया जिसकी परिणति उरुग्वे राउंड एग्रीमेंन्ट के रूप में हुई।[2]

इस सहमति–पत्र द्वारा तैयार की गई नियमावली की रूपरेखा ने अन्तर्राष्ट्रीय व्यापार में निष्पक्ष तथा साफ-सुथरी प्रतियोगिता का मार्ग खोला है। इस प्रकार की प्रतियोगिता से न केवल विभिन्न कंपनियों को बल्कि विभिन्न देशों को भी लाभ होता है क्योंकि इससे बाजारों में भिन्नता होने से और अधिक बेहतर उत्पाद उभरकर सामने आते हैं जिससे विकासशील देशों के निर्यातकों के लिए यह पद्धति चुनौतियों के साथ-साथ अवसर भी प्रदान करती है।[3]

यूरोप, अमेरिका तथा जापान के साथ-साथ अधिक विकासशील देशों में तीव्र प्रतियोगिता एवं श्रम की लागत बढ़ने से बहुराष्ट्रीय विनिर्माण की प्रथा बढ़ी है।[4] विकसित देशों के निर्माता निम्न व मध्यम तकनीक के क्षेत्रों में घटकों तथा उपनिकायों की सप्लाई के लिए विकासशील देशों के उद्यमों की ओर देख रहे हैं। इन्हीं कारणों से विकासशील देशों में उद्योगों से उपभोक्ता उत्पादों की विस्तृत रेंज के लिए माँग बढ़ रही है।[5]

इंटरनेशनल ऑर्गनाइजेशन फॉर स्टेंडर्डाइजेशन (आई एस ओ) ने 1994 में गुणता प्रबन्ध पद्धति के लिये पहली बार 1987 में प्रकाशित [6] अपना आई एस ओ 9000 सीरीज के मॉडल्स के संशोधित संस्करण जारी किये।[7] इस श्रृंखला में गुणवत्ता नीति के मुख्य क्षेत्र तथा मैनेजमेंट लीडरशिप, बाजार शोध, उत्पाद और प्रक्रम डिजाइन एवं विकास, उत्पादन विधियाँ, प्रशिक्षण, ऑडिटिंग तथा डॉक्यूमेंटेशन आदि विषय शामिल हैं। कई देशों की गुणवत्ता से संबन्धित सर्वश्रेष्ठ पद्धतियों को मिलाकर बनाई गई, इस श्रृंखला के मानकों को बहुत से देशों ने अपनाया है। इन मानकों को पालन करने के प्रमाण के रूप में सक्षम प्राधिकृत संस्था से कम्पनी का पंजीकृत होना विश्वव्यापी व्यापार के लिए एक आवश्यक शर्त बन गई है।[8]

किसी विकासशील देश के उद्यमों की विश्वसनीयता इस बात पर निर्भर करती है कि प्रदायक किस हद तक अन्तर्राष्ट्रीय गुणता मानकों की आवश्यकताओं को पूरा कर पाते हैं।[9] इसके अलावा गुणवत्ता को मानकों के अनुरूप बनाए रखने तथा उत्पाद की सुपुर्दगी के प्रति वचनबद्धता पूरी करने के लिए अपनी क्षमताओं का सकरात्मक आश्वासन देने हेतु उनकी सामर्थ्य पर भी स्वीकार्यता निर्भर होती है।[10] इस क्रय–विक्रय के वातावरण में एक प्रतिष्ठान के निर्यात बाजारों में प्रवेश तथा अपने व्यवसाय को चलाने के लिए आई एस ओ 9000 के अनुकूल प्रमाणित गुणता पद्धति का होना एक अनिवार्य आवश्यकता बन गई है।[11]

भारतीय उद्योग बहुत नाजुक दौर से गुजर रहे हैं। व्यापार तथा उद्योग के संबन्ध में उदार नीतियों तथा भारतीय अर्थव्यवस्था के अन्तर्राष्ट्रीयकरण द्वारा सरकार के प्रयत्नों से हमारे उद्योगों को एक ओर बढ़ती हुई प्रतिस्पर्धा का सामना करना पड़ रहा है परन्तु दूसरी ओर अमेरिका, यूरोप, जापान तथा अन्य देशों के बाजारों में निर्यात को बढ़ाने के अवसर मिल रहे हैं।[12] इस वातावरण में भारतीय कम्पनियों के लिए उत्पाद की गुणता एक महत्वपूर्ण तत्व के रूप में उभर कर आ रही है। बाजारोन्मुखी अर्थव्यवस्था में किसी कम्पनी की स्थिति मजबूत करने के लिए गुणवत्ता प्रबन्धन हेतु एक नई विचारधारा और प्रयत्नों का होना आवश्यक है। आई एस ओ 9000 गुणता प्रबन्ध पद्धति की श्रृंखला इस आवश्यकता को पूरा करने के लिए एक उत्कृष्ठ साधन है।[13]

आई एस ओ 9000 क्या है ?

अधिकतर उद्योग, ग्राहकों की आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए उत्पाद बनाते हैं या सेवा प्रदान करते हैं। बहुधा, यह विनिर्देशों की पूर्ति को लिए सीमित होते हैं।[14] यद्यपि, तकनीकी विनिर्देश कोई गारंटी नहीं देता है कि ग्राहक की आकांक्षाओं को लगातार और एकरूपता से पूरा करता रहे । इस कारण ''अन्तिम उत्पाद की गुणता'' के स्थान पर ''पद्धति गुणता'' की ओर ध्यान देना आवश्यक है।[15]

आई एस ओ 9000 श्रृंखला के मानकों का संबन्ध गुणता पद्धति से है।[16] इसमें निर्माताओं और संभरण कर्ताओं को प्रलेखित ''गुणता पद्धति'' को स्थापित तथा बनाये रखना होता है ताकि विशिष्ट आवश्यकताओं के अनुरूप उत्पादों और सेवाओं को निरन्तर सुनिश्चित किया जा सके ।[17] इस प्रकार आई एस ओ 9000 मानक, सामान्य इंजीनियरिंग मानकों से विशेष रूप से भिन्न होते हैं जो उत्पाद या पदार्थ पर स्पष्ट रूप से केन्द्रित होते हैं।[18] इसके विपरीत आई एस ओ 9000 गुणता से संबन्धित सभी प्रकार की व्यापारिक गतिविधियों को मानकीकरण करने का प्रयत्न करते हैं।[19]

आई एस ओ 9000 मानक अपने आप में अद्वितीय हैं। ये उत्पादों तथा प्रक्रियाओं को महत्व देते हैं। ये भाषा, प्रथा व रीतियों से ऊपर हैं और गुणता प्रबन्धन के सिद्धान्तों पर आधारित हैं जो विश्व में लगभग स्वीकारं कर लिये गये हैं।[20]

आई एस ओ 9000 का विकास

द्वितीय विश्व युद्ध के दौरान या बाद में ब्रिटेन तथा संयुक्त राज्य अमेरिका में सैन्य सामानों को खरीदने पर विशेष ध्यान था। यह पाया गया कि युद्ध के दौरान इस्तेमाल में लाई जा रही सैनिक सामग्री की विश्वस्तता निम्न कोटि की थी जिससे युद्ध के प्रचालन की क्षमता कम थी और वित्तीय हानि बहुत अधिक होती थी। यह अनुभव किया गया कि उत्पाद की केवल निर्गम अवस्था में जाँच काफी नहीं थी। सैन्य के क्रय विभागों को कहा गया कि वे प्रदायकों के निवेश, प्रक्रिया और दक्षता पर विशेष ध्यान दें।[21]

इस कारण 1950 के दशक के आखिरी वर्षों में अमेरिका की स्टैनफोर्ड यूनिवर्सिटी के सांख्यिकी-विदों ने एम आई एल मानक बनाये।[22] इन्हीं दिनों ब्रिटेन में भी, रक्षा मंत्रालय के 0521 शृंखला के सैन्य रक्षा क्रय मानक विकसित किये गये।[23] इनका प्रारंभिक उद्देश्य सप्लायर की दक्षता को ध्यान में रखते हुए संगठन के स्वरूप का निरीक्षण करना था और यह सुनिश्चित करना कि प्रदायकों में आवश्यकताओं को लम्बे समय तक पूरा करने की क्षमता थी। इस प्रकार के मानकीकरण के उपायों के इस्तेमाल से उत्पन्न लाभों को सिविल सेक्टर के उद्योगों ने भी सराहा।[24] इस तरह से पहले ब्रिटिश स्टैन्डर्ड बी एस-5179 के प्रकाशन का मार्ग खुला[25] यद्यपि ब्रिटेन में ब्रिटिश स्टैन्डर्ड इन्स्टिट्यूट की स्थापना सन् 1901 में हुई थी। 1979 में बड़े–बड़े निर्माताओं ने संयुक्त रूप से बी एस-**5179** का पुनर्निरीक्षण किया और इसे संशोधित कर बी एस-**5750** बनाया।[26] इसका प्रयोग प्रभावी ढंग से प्रदायक कम्पनियों के निरीक्षण व आकलन के लिये किया गया।

अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर भी उनके महत्व को समझा गया और 1947 में स्थापित जेनेवा, स्विट्जरलैंड की इन्टरनेशनल आर्गेनाइजेशन फॉर स्टैन्डर्डडाइजेशन ने वर्ष 1987 में प्रलेखित गुणता प्रबन्धन पद्धति को विकसित व प्रदर्शित करने के लिए आई एस ओ 9000 की शृंखला के मानक मार्ग-दर्शक के रूप में प्रस्तुत किये।[27] कुछ ही समय में ये मानक सारे विश्व में स्वीकार कर लिये गये जो कि स्टैन्डर्डाइजेशन के इतिहास में एक अनोखी घटना थी।[28] इससे औद्योगिक देशों के साथ–साथ विकासशील देशों में भी गुणता के बारे में एक जोरदार अभियान आरंभ हुआ। आई एस ओ संगठन की सामान्य नीति के अनुसार सभी मानकों की कम से कम पाँच वर्षों में दोबारा जाँच की जाती है ताकि यह सुनिश्चित किया जा सके कि इनमें वर्तमान कार्यकुशलता प्रदर्शित होती है। तदनुसार मूल मानक जो 1987 में जारी किये गये थे, उनका पहली बार संशोधन वर्ष 1994 में किया गया।[29] ऐसा उन्हें विश्व में लागू करने के बाद अनुभवों के आधार पर किया गया। इस संशोधन को पहले चरण का संशोधन माना गया। अब इन मानकों का दूसरे चरण का संशोधन हो रहा है और इसकी प्रक्रिया 1998 में आरम्भ होकर 1999 में भी जारी थी तथा इसका वर्ष 2000 में पूरे होने की आशा है।[30]

आज ऑस्ट्रिया, अर्जेन्टिना, भारत, जर्मनी, ब्रिटेन, जापान तथा अमेरिका सहित विश्व के 100 से भी अधिक देशों के लगभग एक लाख से अधिक संगठनों ने उन मानकों को पृष्ठांकित कर अपना लिया है।[31] वास्तव में आई एस ओ 9000 मानकों ने गुणता प्रबन्धन पद्धति के क्षेत्र में इसकी सम्पूर्ण धारणा को परिवर्तित कर एक क्रान्ति ला दी है। वर्तमान झुकाव यह बताता है[32] कि आई एस ओ 9000 मानक गुणता प्रबन्धन की दिशा में एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा कर रहे हैं और भविष्य में अन्तर्राष्ट्रीय क्षेत्र में उत्कृष्ठ और सर्वतोमुखी औजार के समान इनके प्रयोग होने की आशा है। वह दिन दूर नहीं है जब विश्व भर में गुणता प्रबन्धन के लिए आई एस ओ 9000 मानक वस्तुतः आदर्श प्रतिमान माने जायेंगे। भारतीय मानक ब्यूरो ने आई एस 14000 शृंखला के मानकों को प्रकाशित किया है जो आई एस ओ 9000 शृंखला के मानक के समान हैं।[33] हाल ही में विश्व के तीन बड़े ऑटो निर्माताओं (क्रिसलर, फोर्ड, तथा जनरल मोटर्स) ने स्वचालित उद्योगों के लिए क्यू एस 9000 मानक[34] और आई एस ओ संगठन के पर्यावरण प्रबन्धन के लिए

आई एस ओ 14000 मानक [35] भी विकसित किये हैं।

आई एस ओ 9000 क्यों ?

किसी भी उत्पाद की खरीद के निर्णय में उस उत्पाद की गुणता एक मुख्य पहलू होती है।[36] उत्पाद की खरीद करने वाली कंपनी उसके लिए आर्डर देने से पहले यह जानना चाहती है कि क्या संभरणकर्ता जिस उत्पाद की माँग की गई है उसे पूरा करने के योग्य है या नहीं। इसके लिए[37] आम तौर पर खरीददार किसी संभावित सप्लायर से उस उत्पाद का नमूना माँगता है और उसकी जाँच और परीक्षा करता है कि क्या उत्पाद का वह नमूना उस कम्पनी की उन विशेष माँगों पर खरा उतरता है या नहीं। कभी—कभी ऐसे मामले भी सामने आते हैं कि नमूने की वस्तु तो जाँच में ठीक होती है परन्तु जब वास्तव में माल भेजा जाता है तो उसमें ऐसा माल भी होता है जो कंपनी की माँग पर खरा नहीं उतरता। ऐसी परिस्थितियों से बचने के लिए जो प्रमुख खरीददार सप्लायरों के पास अपने तकनीकी विशेषज्ञ भेजते हैं वे सप्लायर के पूरे काम की जाँच करते हैं और यह सुनिश्चित करते हैं कि सप्लायर अपने माल में निर्धारित गुणता के स्तर को बनाये रखेगा।[38]

प्रदायक की गुणता और योग्यता के बारे में पहले जाँच करना ग्राहक के लिए बहुत महँगा पड़ सकता है, विशेषकर जब प्रदायक विदेशी हों। इसी तरह विभिन्न खरीददारों द्वारा कई बार जाँच करना सप्लायर के लिए भी महँगा साबित हो सकता है क्योंकि हर बार जाँच के लिए तैयारी करने पर काफी समय नष्ट होता है और खर्चा भी आता है। प्रदायकों के लिए एक और समस्या यह रहती है कि अलग अलग जाँचकर्ता खरीददार की भिन्न-भिन्न व्यक्तिगत प्रवृत्ति होती है। विभिन्न ग्राहक कंपनियों के विशेषज्ञों का अपनी कंपनी की ओर से भिन्न-भिन्न अनुभव होता है और उनकी किसी प्रभावी गुणता नियंत्रण पद्धति के बारे में अलग—अलग सोच होती है जिसके परिणामस्वरूप हो सकता है कि किसी सप्लायर को भिन्न—भिन्न खरीददारों से एक ही उत्पाद और उत्पादन पद्धति के बारे में अलग-अलग रिपोर्ट मिलें।[39]

इन समस्याओं को हल करने के लिए एक प्रमाणित गुणता आश्वासन पद्धति की आवश्यकता समझी गई जिसे विश्व भर में स्वीकार किया जाए।[40] यह किसी भी सप्लायर की गुणता पद्धति के मूल्यांकन के लिए एक आधार के रूप में हो सकती है। यह किसी तीसरे पक्ष द्वारा मूल्यांकन के लिए भी उपयोगी हो सकती है जिससे खरीददार द्वारा अपने स्तर पर मूल्यांकन करने की आवश्यकता नहीं होगी और सप्लायर भी भिन्न—भिन्न खरीददारों द्वारा मूल्यांकन और जाँच किये जाने की परेशानी से बच सकेगा।[41] इन्हीं कारणों से अन्तर्राष्ट्रीय मानक संस्था ने गुणता आवश्वासन पद्धति के लिए आई एस ओ 9000 मानक जारी किये।[42]

आई एस ओ 9000 मानक लागू करने से सप्लायर सहित सभी स्टेक होल्डर, ग्राहक, कर्मियों आदि को निम्नलिखित सुविधाएँ मिलती हैं।[43]

➤ प्रलेखित गुणता पद्धति पर आधारित पारदर्शिता और जाँच के जरिए सप्लायर द्वारा इस्तेमाल

गुणता आश्वासन पद्धति के कारण ग्राहक में अधिक विश्वास उत्पन्न होता है।

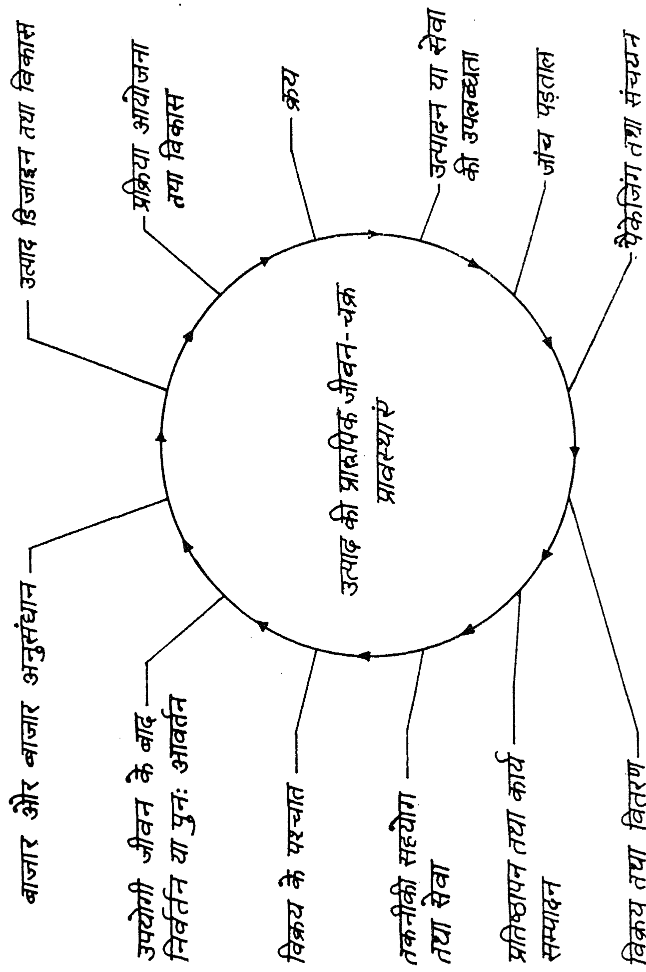
- किसी संगठन की कार्य प्रणाली पर यह सकारात्मक परिवर्तन लाता है।
- उत्पादकता में गुणता प्रणाली के जरिए सुधार आता है।
- इससे अनेक भिन्न–भिन्न ग्राहकों की आवश्यकताएँ पूरी होती हैं।
- यह गुणता की कीमत को कम करता है और इस प्रकार लाभ में वृद्धि होती है।
- यह कर्मियों (आन्तरिक ग्राहक) को अधिक संतुष्टि और प्रेरणा प्रदान करता है।
- पंजीकृत कम्पनी को महत्वपूर्ण उत्पाद निर्देशिका, नियमावली आदि प्राप्त होती है तथा अधिक कारोबार मिलता है।
- पंजीकृत कंपनी स्वीकृत प्रतीक इस्तेमाल कर सकती है।
- भारत और विदेशों के ग्राहक यदि यह शर्त रखते हैं कि उत्पाद आई एस ओ 9000 से प्रमाणित हो तो इस प्रकार उनकी सप्लाई की सन्तुष्टि की जा सकती है।
- राष्ट्रीय तथा अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर स्वीकृत द्विपक्षीय प्रमाणीकरण को त्रिपक्षीय प्रमाणीकरण द्वारा कम किया जा सकता है।

गुणता पद्धति विचारधारा

इससे पहले की आई एस ओ 9000 के स्वरूप व संरचना के बारे में चर्चा की जाए, गुणता पद्धति विचार धारा के विषय में उल्लेख करना आवश्यक होगा।

कोई भी कम्पनी लम्बे समय तक तभी व्यापार कर सकती है और लाभ कमा सकती है जब तक कि वह खरीददारों की माँग को पूरा करती रहे और उन्हें सन्तुष्ट करती रहे।[44] आम तौर पर यह माना जाता है कि खरीददारों द्वारा आर्डर दिये जाने के समय उनके द्वारा उत्पाद के विनिर्देशों के बारे में दी गई जानकारी में उनकी सभी माँगें सम्मिलित होती हैं। यह भी माना जाता है कि यदि इन माँगों को उत्पादन और जाँच के जरिये पूरा किया जाये तो खरीददार पूर्णतः सन्तुष्ट रहता है।[45]

गुणता के बारे में जागरूकता तभी से होनी चाहिए जब सप्लायर को ग्राहक की माँग के बारे में पता लग जाता है। गुणता बनाये रखने के बारे में यह चेतना विकास और निर्माण के विभिन्न चरणों में हमेशा ही बनी रहनी चाहिए और खरीददार को माल की सुपुर्दगी के बाद भी इसमें कोई ढील नहीं आनी चाहिए। यदि बाद में खरीददारों की कोई शिकायते हैं तो उनके बारे में ठीक–ठीक जानकारी प्राप्त करके भविष्य में उस उत्पाद में उन शिकायतों को दूर करके आवश्यक सुधार लाने चाहिए।[46]



चित्र-1 गुणता पर प्रभाव डालने वाले प्रमुख कार्य—कलाप

अलग-अलग चरणों में और कम्पनी के जिन कार्यों का गुणता पर असर पड़ता है, वे हैं बाजार अनुसंधान, उत्पाद के डिजाइन और उसके विकास, प्रक्रिया–आयोजना और खरीद, उत्पादन, जाँच-पड़ताल, पैकेजिंग तथा भंडारण तथा उपकरणों का संस्थापन आदि। गुणता पर प्रभाव डालने वाले प्रमुख कार्य-कलाप चित्र 1 में दर्शाये गये हैं।[47]

यह अच्छी तरह से समझ लेना चाहिए कि गुणता अपने आप में नहीं आ जाती है। उत्पादन के विभिन्न चरणों में इसके लिए प्रयास करना पड़ता है।[48] गुणता पद्धति एक क्रियाविधि है जिसके द्वारा कोई कंपनी अपने साधनों का अच्छा प्रबन्धन करके किफायत से उत्पाद की गुणता को बना सकती है और उसमें सुधार ला सकती है।[49] गुणता पद्धति किसी कंपनी के सभी ग्रुपों में तालमेल बिठाने का काम करती है ताकि वह जिस उत्पाद का उत्पादन करती है उसकी गुणता पर ध्यान दिया जा सके और खरीदारों को संतुष्ट करने में जिन बातों से इस काम में रुकावट आती है, उन्हें दूर किया जा सके।[50]

गुणता पद्धति के बारे में बेहतर जानकारी प्राप्त करने के लिए, गुणता से संबंधित निम्नलिखित शब्दों की परिभाषाओं को जानना अधिक हितकारी होगा।[51]

गुणता : किसी वस्तु की संपूर्ण विशेषताएँ जिसमें बताई गई हों और निहित आवश्यकताओं को पूरा किया गया है।

गुणता नीति : गुणता के बारे में किसी कम्पनी के उच्च प्रबन्धन द्वारा दिये गये निर्देश और उनका संपूर्ण आशय।

गुणता नियंत्रण : कार्य करने की तकनीक और गुणता की आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए कार्य-कलाप ।

गुणता आश्वासन : गुणता को बनाये रखने के लिए किये गये और बताये गये वे सभी योजनाबद्ध सिलसिलेवार कार्य-कलाप जिनकी पर्याप्त विश्वसनीयता सृजन करने की आवश्यकता होती है और जिनसे गुणता की सभी आवश्यकताएँ पूरी होती हों।

गुणता पद्धति : प्रबन्धन का ढाँचा, प्रक्रिया, कार्य व साधन जिनसे गुणता का प्रबन्धन किया जा सके। गुणता के उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए आवश्यकतानुसार गुणता पद्धति को व्यापक होना चाहिए। किसी कम्पनी की गुणता पद्धति मूल रूप से कम्पनी की अन्दरूनी प्रबंधकीय आवश्यकताओं को पूरा करने के लिए होती है। यह किसी ग्राहक की माँगों से अधिक व्यापक होती है क्योंकि ग्राहक गुणता पद्धति के अपने से संबन्धित भाग का ही मूल्यांकन करता है। संविदा अथवा अनिवार्य गुणवत्ता मूल्यांकन उद्देश्यों के लिए गुणता पद्धति के तरीकों को लागू किये जाने के बारे में प्रमाण दिये जाने की आवश्यकता होती है और इसके बाद कम्पनी को आई एस ओ 9000 का प्रमाण पत्र मिलता है।[52]

आई एस ओ 9001–1, चयन तथा उपयोग के लिए दिशा–निर्देश

डिजाइन/विकास, उत्पादन
प्रतिष्ठापन तथा सेवा :
20 अनुच्छेद

उत्पादन, प्रतिष्ठापन
तथा सेवा :
19 अनुच्छेद

अन्तिम निरीक्षण तथा परीक्षण :
16 अनुच्छेद



आई एस ओ 9004–1,
गुणता प्रबन्धन तथा गुणता पद्धति तत्व—दिशा-निर्देश

चित्र–2 आई एस ओ 9000 श्रृंखला के मानकों की संरचना

आई एस ओ 9000 मानकों की मुख्य रूप से दो श्रेणियाँ हैं[53] :

- मूलभूत मानक तथा
- संपूरक मानक।

चित्र 2 में आई एस ओ 9000 श्रृंखला के पांच मूल मानकों की संरचना दिखाई गई है।[54] इस श्रृंखला के प्रमुख तीन भाग आई एस ओ 9001, और 9002 और 9003 मानक बाहरी गुणता आश्वासन प्रयोजन के लिए इस्तेमाल में लाये जाते हैं।[55] बाकी को दो मानक, आई एस ओ 9000 तथा आई एस ओ 9004 दिशा-निर्देश प्रलेख मानक हैं, प्रभावकारी मानक नहीं हैं और इन्हें संदर्भ की तरह इस्तेमाल किया जाना चाहिए।[56]

आइये, अब हम आई एस ओ 9000 श्रेणी के पाँच आधारभूत मानकों के स्वरूप व संरचना के बारे में विचार करें।[57]

1. आई एस ओ 9000-1 : 1994, इस मानक में गुणता से संबन्धित धारणाओं के सिद्धान्तों को स्पष्ट किया गया है और गुणता आश्वासन तथा प्रबन्धन के लिए मानकों की आई एस ओ मानक के चयन और प्रयोग के बारे में मार्गनिर्देश दिये गये हैं। इस मानक का मुख्य उद्देश्य किसी कम्पनी को यह जानकारी देने के लिए सहायता करना है कि तीन मानकों (आई एस ओ 9001, और आई एस ओ 9002 या आई एस ओ 9003) में से कौन सा मानक उनकी आवश्यकताओं के लिए उचित है। वास्तव में यह मानक आई एस ओ 9000 श्रृंखला के लिए भूमिका-स्वरूप है।

2. आई एस ओ 9001 : इस गुणता पद्धति मानक में 20 तत्व (आवश्यकताएँ) होते हैं और यह उन कंपनियों के लिए है जहाँ डिजाइन/विकास, उत्पादन, प्रतिष्ठापन और सेवा का काम होता है।

3. आई एस ओ 9002 : इस गुणता पद्धति मानक में 19 तत्व हैं और यह उन कम्पनियों के लिये है, जहाँ केवल उत्पादन, प्रतिष्ठापन और सेवा की जिम्मेदारी है। इसमें डिजाइन नियंत्रण (अनुच्छेद 4.4) नहीं होता है।

4. आई एस ओ 9003 : इस गुणता पद्धति मानक में 16 तत्व होते हैं। यह सबसे कम विस्तृत मानकीकरण मानक है और उन कम्पनियों के लिये है जहाँ गुणता का आश्वासन सिर्फ निरीक्षण तथा परीक्षण से होता है। आई एस ओ 9001 की तुलना में इसमें निम्नलिखित 4 आवश्यकताएँ सम्मिलित नहीं होती हैं : डिजाइन नियंत्रण, क्रय, प्रक्रिया नियंत्रण तथा सेवा (अनुच्छेद 4.4, 4.6, 4.9 तथा 4.19)। आई एस ओ 9001 या 9002 की आवश्यकताओं की तुलना में आई एस ओ 9003 की आवश्यकताएँ शिथिल होती हैं।

5. आई एस ओ 9004-1 : 1994, गुणता प्रबन्धन तथा गुणता पद्धति तत्व—भाग 1, दिशा निर्देश : यह मानक किसी कंपनी द्वारा अपने अंदरूनी प्रबन्धन के लिए प्रयोग में लाने के लिये है जिससे गुणता पद्धति का ढाँचा तैयार करके उसे लागू किया जा सके और ग्राहक की माँगों को पूरा करके सम्पूर्ण सफलता प्राप्त की जा सके।

सारणी 1 में आई एस ओ 9001, 9002 तथा 9003 गुणता प्रबन्धन पद्धति मानकों के तत्वों की सूची दी गई है जिसमें तुलनात्मक अनुच्छेदों (उपखंडों) का ब्योरा दिया गया है।[58] ये तीन गुणता आश्वासन मानकीकरण मॉडल संयोजी और प्रगामी हैं। आई एस ओ 9003, आई एस ओ 9002 में सम्मिलित है जबकि आई एस ओ 9002 आगे 9001 में शामिल है। ये तीन मानकीकरण मानक बताते हैं कि हमें ''क्या'' चाहिए जबकि आई एस ओ 9004-1, यह वर्णन करता है कि आवश्यकताओं को ''कैसे'' पूरा किया जाए।[59]

सारणी 1

आई एस ओ 9001, 9002 तथा 9003 गुणता प्रबन्ध पद्धति मानकों के तत्वों की सूची

तत्व का नाम	मानकों में तुलनात्मक अनुच्छेद (उपखंड) की संख्या		
	आई एस ओ 9001	आई एस ओ 9002	आई एस ओ 9003
प्रबन्ध उत्तरदायित्व	4.1	4.1	4.1
गुणता पद्धति	4.2	4.2	4.2
संविदा पुनर्निरीक्षण	4.3	4.3	4.3
डिजाइन नियंत्रण	4.4	लागू नहीं	लागू नहीं
प्रलेख तथा आँकडों का नियंत्रण	4.5	4.5	4.5
क्रय	4.6	4.6	लागू नहीं
ग्राहक द्वारा सप्लाई की गई सामग्री पर नियंत्रण	4.7	4.7	4.7
उत्पाद की पहचान और उसके वारे में पता लगाने की योग्यता	4.8	4.8	4.8
प्रक्रम नियंत्रण	4.9	4.9	लागू नहीं
निरीक्षण तथा परीक्षण	4.10	4.10	4.10
निरीक्षण, मापन तथा परीक्षण उपकरणों का नियंत्रण	4.11	4.11	4.11
निरीक्षण तथा परीक्षण वस्तुस्थिति	4.12	4.12	4.12
अनुपयुक्त उत्पाद का नियंत्रण	4.13	4.13	4.13
संशोधन एवं निवारक क्रियाएँ	4.14	4.14	4.14
हैंडलिंग, भंडारण, पैकेजिंग, संरक्षण तथा माल सौंपना	4.15	4.15	4.15
गुणता रिकॉर्ड क नियंत्रण	4.16	4.16	4.16
आन्तरिक गुणता, ऑडिट	4.17	4.17	4.17
प्रशिक्षण	4.18	4.18	4.18
सेवा	4.19	4.19	लागू नहीं
सांख्यकीय तकनीकें	4.20	4.20	4.20

इस पर ध्यान दिया जाना चाहिए की आई एस ओ 9001, 9002 तथा 9003 में वताए गये गुणता आश्वासन मॉडल तीन खास किस्म की गुणता पद्धति की आवश्यकताओं के वारे में हैं जो द्विपक्षीय करार पद्धित के प्रयोजन के लिए उपयुक्त हैं।[60] ये मानक तीसरे पक्ष द्वारा सर्टिफिकेशन

का आधार भी बनते हैं। मानक आई एस ओ 9004–1 संविदा, नियामक अथवा प्रमाणीकरण प्रयोजन के लिए नहीं है।[61]

आई एस ओ 9001 के तत्व

चूँकि आई एस ओ 9001 अन्य मानकीकरण मानकों ती तुलना में सबसे अधिक व्यापक है, आइये, इस मानक के तत्वों (आवश्यकताओं) के बारे में चर्चा करें।[62]

4 गुणता पद्धति आवश्यकताएँ

◆ तत्व 4.1 : प्रबन्धन उत्तरदायित्व

उद्देश्य : गुणता के लिये जिम्मेवारी का निर्धारण

- गुणता नीति
  - सप्लायर के संगठनात्मक लक्ष्य और ग्राहक की आशाओं तथा माँगों के अनुरूप
  - सभी स्तरों पर इसकी जानकारी तथा परिपालन सुनिश्चित करना
- संगठन
  - उत्तरदायित्व तथा अधिकार
  - सम्पूर्ण गुणता पद्धति के लिए साधन
  - प्रबन्धन प्रतिनिधि
- प्रबन्धन पुनर्निरीक्षण
  - प्रभावकारी परिणाम के लिए गुणता पद्धति का पुनर्निरीक्षण
  - रिकॉर्ड का पुनर्निरीक्षण

◆ तत्व 4.2 : गुणता पद्धति

उद्देश्य : प्रलेखित कार्य विधियों द्वारा विनिर्दिष्ट आवश्यकताओं के अनुरूप उत्पाद/सेवा को बिना किसी गतिरोध के सुनिश्चित करना

- प्रलेखित गुणता पद्धति
  - गुणता पुस्तिका
  - कार्य–विधियाँ/कार्य अनुदेश
  - गुणता रिकॉर्ड

◆ तत्व 4.3 संविदा पुनर्निरीक्षण

उद्देश्य : सुणता आवश्यकताओं को पहचानना तथा वर्णन करना

- संविदा पुनर्निरीक्षण के लिये कार्यविधि
  - स्पष्टतः निर्धारित करना
  - संविदाओं की आवश्यकताओं की पूर्ति की क्षमता को सुनिश्चित करना
  - विवादों का समाधान (यदि कोई है)
- पुनर्निरीक्षण का रिकॉर्ड

◆ तत्व 4.4 : डिजाइन नियंत्रण

उद्देश्य : डिजाइन का नियंत्रण तथा जाँच-पड़ताल

- डिजाइन कार्य-कलापों के लिए आयोजना
- कर्मचारी तथा उपकरण
- संगठन तथा तकनीकी इन्टरफेस
- डिजाइन निवेश
- डिजाइन पुनर्निरीक्षण
- डिजाइन निर्गम
- डिजाइन की जाँच—पड़ताल
- डिजाइन की वैधता

◆ तत्व 4.5 : दस्तावेज और आँकड़ों का नियंत्रण

उद्देश्य : सभी स्थानों पर मान्य दस्तावेजों को उपलब्ध कराना

- प्रलेख की स्वीकृति तथा निर्गम
- प्रलेख परिवर्तन विधि
- अप्रचलित प्रलेखों को वापिस लेना

◆ तत्व 4.6 : क्रय

उद्देश्य : सप्लाई में गुणता सुनिश्चित करना

- उप-विक्रेताओं का चयन, मूल्यांकन तथा स्वीकृति
- क्रय आँकड़े
- क्रय उत्पाद की जाँच-पड़ताल

◆ तत्व 4.7 : ग्राहक द्वारा सप्लाई की गई सामग्री पर नियंत्रण

उद्देश्य : गुणता सुनिश्चित करना

- जाँच-पड़ताल, भंडारण तथा रख-रखाव
- क्षति होने पर उपाय

◆ तत्व 4.8 : उत्पाद की पहचान और उसके बारे में पता लगाने की योग्यता

उद्देश्य : पहचान प्रदान करना और पता लगाने की योग्यता सुनिश्चित करना

- स्रोत के बारे में पता लगाने की योग्यता कायम रखना
    - उप-ठेकेदार
    - कच्चा माल
    - अन्वेषण/मार्ग निर्धारण कार्ड
    - बैच/उत्पाद के लिये पहचान संख्या
- रिकॉर्ड

◆ तत्व 4.9 : प्रक्रम नियंत्रण

उद्देश्य : निर्माण तथा सेवा प्रक्रियाओं में गुणता सुनिश्चित करना

- नियंत्रित अवस्थाएँ
- उचित अवस्थाएँ
- उचित उपकरण
- प्रक्रम स्वीकृति

- प्रक्रम की क्षणता जारी रखने के लिए उपकरों का रख-रखाव
    - ■ प्रशिक्षित ऑपरेटर

◆ तत्व 4.10 : निरीक्षण तथा परीक्षण

उद्देश्य : परीक्षण के जरिये गुणता का प्रमाण

- आने वाली सामग्री का परीक्षण
- प्रक्रम के दौरान परीक्षण तथा मॉनीटरन
- अन्तिम निरीक्षण तथा परीक्षण
- निरीक्षण तथा परीक्षण रिकॉर्ड

◆ तत्व 4.11 : निरीक्षण, मापन तथा परीक्षण उपकरणों का नियंत्रण

उद्देश्य : परीक्षण उपकरणों की अनुकूलता सुनिश्चित करना

- परीक्षण तथा मापन उपकरण (परीक्षण सॉफ्टवेयर सहित)
    - ■ उचित परीक्षण उपकरणों का चयन
    - ■ उचित वातावरण सुनिश्चित करना
    - ■ रोजनामचा का रख-रखाव
- अंशांकन
    - ■ मानकों के बारे में पता लगाना
    - ■ अंशांकन बारंबारता
    - ■ वस्तुस्थिति तथा रिकॉर्ड
    - ■ त्रुटियाँ/अनिश्चितता

◆ तत्व 4.12 : निरीक्षण तथा परीक्षण वस्तुस्थिति

उद्देश्य : सन्तोषजनक निरीक्षण का प्रमाण

- निशान लगाना
    - ■ स्टैम्प

    - टैग
    - लेबल
    - मार्ग निर्धारण कार्ड
- रिकॉर्ड

◆ तत्व 4.13 : अनुपयुक्त उत्पाद का नियंत्रण

उद्देश्य : दोषपूर्ण सामान का लापरवाही से इस्तेमाल पर रोक लगाना

- पृथक करना/पहचानना
- निम्नलिखित कार्यों के लिए प्राधिकारी निश्चित करना
    - विचलन के साथ स्वीकृति
    - पुनः कार्य करना
    - अस्वीकृति तथा हटाना
- इस्तेमाल के लिए स्वीकृत अनुपयुक्त उत्पाद का रिकॉर्ड

◆ तत्व 4.14 : संशोधन एवं निवारक क्रियाएँ

उद्देश्य : जाँच और त्रुटियों की पुनरावृत्ति को रोकना

- अनुपयुक्तियों की पहचान
- क्रमबद्ध विश्लेषण के लिए अवसंरचना
- त्रुटियों को रोकने के सुधारों को लागू करना
- संशोधनों का मॉनीटरन
- कार्य-विधियों में परिवर्तन का रिकॉर्ड

◆ तत्व 4.15 : हैंडलिंग, भंडारण, पैकेजिंग, संरक्षण तथा माल सौंपना

उद्देश्य : माल की क्षति तथा गड़बड़ी में मिलने को रोकना

- भंडारण
    - पर्यावरण
    - संचयन में जाँच-पड़ताल

- पैकेजिंग
  - रक्षण
  - निशान लगाना
- माल सौंपना
  - रक्षण
  - परिवहन उपकरण का रख-रखाव
  - निधानी आयु

◆ तत्व 4.16 : गुणता रिकॉर्ड का नियंत्रण

उद्देश्य : गुणता की जानकारी तथा प्रमाण

- निम्नलिखित कार्यों के लिए रिकॉर्ड रखना
  - पहचानना/पता लगाने की योग्यता
  - क्रय
  - भंडारण
  - उपकरण रख-रखाव
  - निरीक्षण/परीक्षण
  - संविदा पुनर्निरीक्षण
  - ऑडिट
- धारण काल तथा अभिगम्यता

◆ तत्व 4.17 :आन्तरिक गुणता ऑडिट

उद्देश्य : गुणता पद्धति के प्रभाव का मॉनीटरन

- प्रलेखित विधि
  - ऑडिट की योजना
  - ऑडिटरों की स्वतन्त्रता

- ऑडिट परिणाम
  - प्रलेख तथा रिपोर्ट
  - संशोधी क्रिया

◆ तत्व 4.18 : प्रशिक्षण

उद्देश्य : कर्मचारियों की पर्याप्त योग्यता सुनिश्चित करना

- प्रशिक्षण आवश्यकताओं को जानने के लिए प्रलेखित विधियाँ
  - प्रबन्ध कार्यों के लिए प्रशिक्षण
  - तकनीकी कार्यों के लिए प्रशिक्षण
  - प्रवीणता/कौशल के लिए सुपरवाइजर तथा कर्मी
- प्रशिक्षण रिकॉर्ड

◆ तत्व 4.19 : सेवा

उद्देश्य : करार संबन्धी आवश्यक सेवा प्रदान करना

- कार्य-विधियाँ स्थापित करना
- सेवा आवश्यकताओं का मॉनीटरन

◆ तत्व 4.20 : सांख्यकीय तकनीकें

उद्देश्य : गुणता विशिष्टताओं का पुर्वानुमान, जाँच-पड़ताल तथा निर्धारण

- माँगों को पहचानना
- कार्य-विधियां

आई एस ओ 9000 श्रृंखला के संपूरक मानक

आई एस ओ 9000 श्रृंखला में पांच आधार-भूत मानकों के अतिरिक्त निम्नलिखित संपूरक मानक भी सम्मिलित हैं।[63] :

1. आई एस ओ 8402 : 1993, गुणता प्रबन्ध तथा गुणता आश्वासन में प्रचलित शब्दों की परिभाषा।

2. आई एस ओ 9000-2 : 1993, गुणता प्रबन्ध तथा गुणता आश्वासन मानक—भाग 2, इसमें आई एस ओ 9001, 9002 तथा 9003 लागू करने के मार्गदर्शन हैं।

3. आई एस ओ 9000-3 : 1991, गुणता प्रबन्ध तथा गुणता आश्वासन मानक भाग-3, कम्प्यूटर सॉफ्टवेयर में आई एस ओ 9001 को लागू करने के लिए मार्गदर्शन।

4. आई एस ओ 300-1/आई एस ओ 9000-4 : 1993, गुणता प्रबन्ध तथा गुणता आश्वासन मानक—भाग 4, इसमें वस्तु की विश्वसनीयता बनाये रखने के कार्यक्रम के बारे में मार्ग-दर्शन है।

5. आई एस ओ 9004-2 : 1991, गुणता प्रबन्ध तथा गुणता पद्धति तत्व भाग-2, सेवाओं के लिए मार्गदर्शन।

6. आई एस ओ 9004-3 : 1993, इसमें सामग्री उद्योग में आई एस ओ 9000 को लागू करने के मार्गदर्शन हैं।

7. आई एस ओ 9004-4 : 1993, इसमें वस्तु की गुणता को बढ़ाने के लिए मार्गदर्शन हैं।

8. आई एस ओ 10005 : 1995, इसमें गुणता की योजना बनाने का ब्योरा दिया गया है।

9. आई एस ओ 10007 : 1995, इसमें वस्तु के आकार को डिजाइन के समान बनाये जाने संबंधी मार्गदर्शन हैं।

10. आई एस ओ 10011-1 : 1990, इसमें गुणता पद्धति के जाँच सम्बंधी मार्गदर्शन हैं।

11. आई एस ओ 10011-2 : 1991, इसमें गुणता पद्धति के जाँच करने वाले व्यक्तियों की योग्यता संबन्धी मार्ग दर्शन हैं।

12. आई एस ओ 10011-3 : 1991, इसमें गुणता पद्धति के जाँच के कार्यक्रमों के वारे में उल्लेख किया गया है।

13. आई एस ओ 10012-12 : 1992, इसमें मापयंत्रों के सही मापन की क्षमता को सुनिश्चित करने के मार्गदर्शन हैं।

14. आई एस ओ 10013 : 1995, इसमें गुणता पुस्तिका बनाने संबन्धित मार्गदर्शन हैं।

आई एस ओ 9000 गुणता प्रबन्ध पद्धति के लाभ तथा प्रभाव

आई एस ओ 9000 गुणता प्रबन्ध पद्धति का उपयोग करने से विभिन्न प्रकार का लाभ प्राप्त होता है।[64] एक प्रभावी गुणता पद्धति करार के माले में ग्राहकों में विश्वास उत्पन्न होता है। इस पद्धति का संप्लायरों के लिए भी बहुत अधिक महत्व है। यदि पहली बार में ही सारे

काम सही ढंग से किये जायें तो किसी भी प्रकार की बर्बादी नहीं होती है, लागत भी कम से कम आती है और अधिक से अधिक लाभ होता है। एक प्रभावी गुणता पद्धति से सप्लायरों को नीचे दिये गये लाभ मिल सकते हैं : [65]

- ➤ इससे कम्पनी को कार्य समझने, उसके लिए योजना बनाने तथा कार्य करने के तरीकों को निर्धारित करने का अवसर प्राप्त होता है ताकि ठीक परिणाम प्राप्त किये जा सकें।
- ➤ इससे समस्या को जानने, उनको हल करने तथा समस्याएँ दोबारा उत्पन्न न हों, इसके लिये रोकथाम के उपाय करने में सहायता मिलती है और इस प्रकार कार्य में सुधार के अवसर मिलते हैं।
- ➤ इससे कर्मचारियों को अपने कार्यों पर नियंत्रण रखने और आम प्रबन्धकों को बार-बार कार्य की देखभाल के काम से मुक्त रखा जा सकता है। इससे कर्मियों में गुणता के विषय में जागरूकता उत्पन्न करने और उनमें अपने काम के बारे में संतोष पैदा होता है।
- ➤ कम्पनी को अपने अनुभवों का लेखा-जोखा रखने का अवसर मिलता है। इसका उपयोग कर्मचारियों को ट्रेनिंग देने और उनेक काम-काज में सुधार लाने के लिए किया जा सकता है।
- ➤ इसके उपयोग से ऐसे आँकड़े उपलब्ध होते हैं जिनका इस्तेमाल विभिन्न विभागों के कार्य करने की प्रक्रिया की कुशलता और उत्पादों की गुणता का सही स्तर जानने के लिए किया जा सकता है। इससे कार्य करने के तरीकों और वस्तु की गुणता में सुधार लाया जा सकता है।
- ➤ इसका एक परिणाम उत्पादों की गुणता और पद्धति कितनी प्रभावी है, इसको दर्शाने के लिए प्रमाण हासिल करने में और ग्राहकों में विश्वास पैदा करने के लिए भी किया जा सकता है।

आई एस ओ 9000 पर आधारित गुणता पद्धति को लागू करने से गुणता पद्धति के काम-चलाऊ तरीके को एक संगठित और किफायती लागत वाली गुणता प्रबन्धन पद्धति में बदला जा सकता है।[66] कम लागत पर ऊँची गुणता देने से कम्पनी को बाजार में दूसरी कम्पनियों से मुकाबला करने में बढ़त हासिल होती है।

सारे विश्व में गुणता पद्धति को कम्पनी के कार्यों में लागू करने वाली कम्पनियों की संख्या बढ़ती जा रही है। इसके अतिरिक्त बड़ी कम्पनियाँ भी इस बात पर जोर दे रही हैं कि उनके सप्लायर प्रमाणीकृत गुणता पद्धति को लागू करें।[67] अतः विकासशील देशों में कम्पनियों के लिए यह आवश्यक हो गया है कि वे आई एस ओ 9000 पर आधारित गुणता पद्धति को अपनाएँ। इससे उनके बारे में अच्छी धारणा बनने में मदद मिलेगी और उन पर विश्वास

कायम होगा। विकासशील देशों के लिए यह विशेष रूप से उपयोगी है क्योंकि उन्हें विज्ञापन पर खर्च किए बिना ही आई एस ओ 9000 का प्रमाण पत्र लेने से अन्तर्राष्ट्रीय बाजारों में उनकी अच्छी साख बन सकती है।[68]

विश्व के अनेक देशों में आई एस ओ 9000 मानक लागू करने से वहाँ के निर्यात सम्बन्धित उद्योग ग्राहकों की अपेक्षाओं के अनुरूप तथा निर्धारित मानकों एवं विशिष्टताओं वाले उत्पादों और सेवैओं के साथ साथ तथा अन्य जरूरी आवश्यकताओं को कम लागत पर उच्च स्तर की कार्यक्षमता के साथ उपलब्ध कराने में सक्षम हो जाते हैं।[69] संक्षेप में कहा जा सकता है [70] कि इन उद्योगों का संबन्धित बाजारों में प्रमुख स्थान बनाने में ये मानक काफी सहायक सिद्ध होते हैं क्योंकि अन्तर्राष्ट्रीय स्तर पर उपयोग होने वाले ये मानक उनके व्यापार के लिए तकनीकी अवरोध नहीं बन पाते हैं।

आई एस ओ 9000 गुणता पद्धति एक मजबूत आधार प्रदान करती है जिस पर एक कम्पनी ग्राहक पर विशेष ध्यान देते हुए सभी कर्मचारियों की माँगो एवं निरन्तर सुधार के तरीकों व तकनीकों को शामिल करते हुए सम्पूर्ण गुणता प्रवन्ध (टोटल क्वालिटी मैनेजमेंट—टी क्यू एम) प्रणाली के वातावरण का विकास कर सकती है।[71]

विकसित और विशेष रूप से विकासशील देशों में उद्योगों के लिए यह ध्यान देने योग्य है कि वे संगठन में स्थायित्व बनाने तथा गुणता में सामंजस्य स्थापित करने के लिए सवसे पहले आई एस ओ 9000 गुणता प्रबन्ध पद्धति बनायें।[72] जब पद्धति सुव्यवस्थित हो जाए तथा मानकीकरण हो गया हो तब कर्मचारियों में उत्साह एवं प्रचालन संबंधी दक्षता को बढ़ाने के लिए कम्पनी गुणता की उन्नत तकनीकों का प्रयोग शुरू कर सकती है।

पाठकों की जानकारी के लिए हम यह बता दें कि हमारे संस्थान, यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान (आई आर डी ई), देहरादून में आई एस ओ 9001 गुणता प्रबन्ध पद्धति को लागू करने के लिए आवश्यक कार्रवाई की जा रही है। आई आर डी ई, रक्षा मंत्रालय के अन्तर्गत रक्षा अनुसंधान एवं विकास संगठन की एक महत्वपूर्ण प्रयोगशाला है जो प्रकाशिकी, वैद्युत प्रकाशिकी तथा संबंधित यंत्रीकरण के क्षेत्र में अनुसंधान, डिजाइन, विकास तथा तकनीकी अन्तरण का अग्रगामी तथा मौलिक कार्य कर सही है। इस संस्थान ने भिन्न भिन्न प्रकार के आधुनिक यंत्रों का सफलतापूर्वक डिजाइन व विकास किया है। उत्पादन के पश्चात् अब ये यंत्र देश की थल, जल व वायु सेनाओं द्वारा इस्तेमाल में लाये जा रहे हैं।

कृतज्ञता—ज्ञापन

लेखक, यंत्र अनुसंधान एवं विकास संस्थान, देहरादून के निदेशक के प्रति आभार प्रगट करता है, जिन्होंने इस सिंहावलोकन लेख के दौरान प्रोत्साहन प्रदान किया और गहरी रुचि दर्शाई।

निर्देश

1. लैम्ब्रेच्ट, जे. एल. : ISO 9000 : Implementation for Small Business, ए एस क्यू सी क्वालिटी प्रेस, विस्कोन्सिन, 1996, p. 23.

2. ISO 9000 Guide for Enterprises in Developing Countries, आई टी सी, जेनेवा, स्विट्जरलैंड, 1996.

3. Applying ISO 9000 in SMEs in Developing Countries, आई टी सी, जेनेवा, स्विट्जरलैंड, 1996.

4. बेन्सन, टी. ई. : Quality Goes International, इन्डस्ट्री वीक, 19 अगस्त 1991, p. 55.

5. किम्बर, आर. जे., ग्रेनियर, आर. डी. तथा हेल्ट, जे. जे. : Quality Management Handbook, मार्शेल डेकर, इन्क., न्यूयॉर्क, 1997, p. 79.

6. ISO 9000, इंटरनेशनल आर्गनांइजेशन फॉर स्टैन्डर्डाइजेशन, जेनेवा, स्विट्जरलैंड, 1987.

7. ISO 9000, इंटरनेशनल आर्गनाइजेशन फॉर स्टैन्डर्डाइजेशन, जेनेवा, स्विट्जरलैंड, 1994.

8. प्लैसेक, सी. : The ISO 9000 Edge, क्वालिटी, p. 5, 1992.

9. कौटलर, पी. : Marketing Management : Analysis, Planning and Contral, प्रेन्टिस्हॉल, न्यूयॉर्क, 1984, p. 1.

10. पोर्टर, एम. : Competitive Strategy, फ्री प्रेस, न्यूयार्क, 1985, p. 82.

11. हौएल, डी. : ISO 9000 Quality Systems Development Handbook, बटरवर्थ हाइनमैन, ऑक्स्फोर्ड, 1998, p. 184.

12. अब्राहम, बी तथा नायर, एन. यू. : Quality Improvement Through Statistical Methods, बर्कहाउजर, बोस्टन, 1998, p. 23.

13. नाइस, ए. : ISO 9000 : International standard for Quality, इलेक्ट्रॉनिक न्यूज, नवम्बर 1992.

14. हैमर, एम. तथा चैम्पि, जे. : Reengineering the Corporation : A manifesto for Business Revolntion, हार्पर बिजनेस, न्यूयॉर्क, 1993.

15. इन्कन, ए. जे. : Quality Control and Industrial Statistics, 4th ed., आर जी इर्विन, होमवुड, इलिनियस, 1974, p. 57.

16. ISO Standards Handbook No. 3 **(ISBN : 9267-100548),** आई एस ओ, जेनेवा, स्विट्जरलैंड

17. हौएल, डी. : ISO 9000 Quality Systems Handbook, बटरवर्थ हाइनमैन, ऑक्सफोर्ड, 1998.

18. कूओ, डब्लू. : Quality Through Engineering Design, एल्सवियर, एम्स्टर्डम, 1993.

19. वाशिओ, वाई. : Steps for Developing New Products viewed from the Standpoint of Total Quality Control, Quality through Engineering Design, एल्सवियर, एम्स्टर्डम, 1993, p. 65.

20. हूचेन्स, एस. : Facing the ISO 9000 Challenge, कम्प्लाएंस इंजीनियरिंग, फॉल 1991, p. 19.

21. जॉन्सन, पी. एल. : Keeping Score : Strategies and Tactics for Winning the Quality War, हार्पर बिजनेस, न्यूयॉर्क, 1989, p. 123.

22. बर्जर, आर. डब्ल्यू. तथा हार्ट, टी. एच.: Statistical Process Control, मार्शेल डेकर, न्यूयॉर्क, 1986, p. 111.

23. डेमिंग, ई. : Out of Crisis, एम आई टी प्रेस, मैसाचूसेट्स, 1986 p. 88.

24. जुरान, जे. एस. : Juran's Quality Control Handbook, 4th ed., मैक्ग्रा-हिल, न्यूयॉर्क, 1988.

25. फाइजेनबॉय, ए. वी. : Total Quality control, 3rd ed., मैक्ग्रा-हिल, न्यूयॉर्क, 1983, p. 63.

26. ग्रान्ट, ई. एल. तथा लीवेनवर्थ, आर. एस. : Statistical Quality control, 6th ed., मैक्ग्रा-हिल, न्यूयॉर्क, 1988, p. 75.

27. बारेट, सी. आर. : Quality Manager's Complete Guide to ISO 9000, प्रेन्टिस हॉल, न्यूजर्सी, 1993.

28. पीच, आर. डब्ल्यू. : The ISO 9000 Handbook, मैक्ग्रा-हिल, इन्क. न्यूयॉर्क, 1996.

29. लैम्प्रेच्ट, जे. एल. : ISO 9000 and the Service Sector : A Critical Interpretation of 1994 Revisions, ए एस क्यू सी क्वालिटी प्रेस, विस्कोन्सिन, 1994.

30. Working/Committee Drafts of ISO 9001 : 2000 and ISO 9004 : 2000, सेक्रेटेरिएट ऑफ आई एस ओ/टी सी 176 एस सी 2, जेनेवा स्विट्जरलैंड, 1998/1999.

31. कैसिओ, जे. : ISO 14000 Handbook, ए एस क्यू सी क्वालिटी प्रेस, विस्कोन्सिन, 1999.

32. रौबिट, जे. टी. : The QS-9000 : The Fast Track to Compliance, क्वालिटी रिसोर्सेज़ न्यूयॉर्क, 1998, p. 105.

33. ब्यूरो ऑफ इंडियन स्टैन्डर्डस : Quality Systems IS 14000 Series, New Delhi, 1990.

34. गुरमीत, जी. : QS–9000 : Implementation and Registration, मार्शेल डेकर, इन्क., न्यूयॉर्क, 1997, p. 21.

35. वुडसाइड, जी. यतूरी, जे. तथा ऑरिशिओ, पी. : ISO 14001 Implementation Manual, मैक्ग्रा-हिल, इन्क, न्यूयॉर्क, 1998.

36. हियाम, ए. : Closing the Quality Gap. प्रेन्टिस-हॉल, न्यूयॉर्क, 1992, p. 47.

37. मौन्टगोमरी, डी. सी. : Statistical Quality Control, जॉन विली, न्यूयॉर्क, 1993, p. 122.

38. जूरान, जे. एम. : Juran on Leadership for Quality, फ्री प्रेस, न्यूयॉर्क, 1989.

39. बर्कमैन, बी. एन. European Companies join the Quality Crusade, इलेक्ट्रॉनिक विजनेस, 1989, p. 263.

40. लिम, टी. ई. तथा नाइउ, बी. सी. : Quality Managemet Systems : Assessment to ISO 9000, प्रेन्टिस-हॉल, न्यूजर्सी, 1997.

41. ग्राइना, एफ. एम. : Quality Costs–User *vs.* Manufacturer, क्वालिटी प्रोग्रेस जून, 1977, p. 10.

42. जॉन्सन, पी. एल. तथा कान्टनर, आर. : How to Write your ISO 9000 Quality Manual, पेरी जॉन्सन, इन्क., साउथफील्ड, एम आई, 1992.

43. Vision 2000 : A Strategy for International Standards Implementation in the Quality Arena During the 1990's. आई एस ओ/ टी सी 176 जेनेवा, स्विट्जरलैंड, 1991.

44. बाग्ची, टी. पी. : Taguchi Methods Explained : Practical Steps to Robust Design, प्रेन्टिस-हॉल (इंडिया), नई दिल्ली, 1993.

45. अर्न्स्ट तथा यंग : A study of 584– U.S, Canadian, Japanese and German Companies, टोरन्टो, 1992.

46. फुक्सबर्ग, जी. : Quality Programs show Shoddy Results, वाल स्ट्रीट जर्नल, बी 1, 14 मई 1992.

47. जॉन्सन, पी. एल., ISO 9000 Meeting the New International Standards, मैक्ग्रा-हिल, इन्क., न्यूयॉर्क, 1993, p. 87.

48. इमाई, एम. : Kaizen : The key to Japanese Competitive Success, रैन्डम हाउस, न्यूयॉर्क, 1986, p. 69.

49. जूरान, जे. एम. तथा ग्राइना, एफ एम. : Quality Planning and Analysis From Product Development through use, मैक्ग्रा-हिल, न्यूयॉर्क, 1993, p. 89.

50. इशीकावा, के. : Guide to Quality Control, 2nd ed., क्वालिटी रिसोर्सेज, न्यूयॉर्क, 1986.

51. इंटरनेशनल आर्गनाइजेशन फॉर स्टैन्डरडाइजेशन, ISO 9000 : International Standards for Quality Management, 2nd ed., जेनवा स्विट्जरलैंड, 1992.

52. ग्राहम, जे. एफ. : ISO 9000 Certification : Maintenance's Role, प्लांट सर्विसेज, नवम्बर 1991, p. 10.

53. जॉन्सन, पी. एल. तथा कान्टरन, आर. : All About 9000, पेरी जॉन्सन, इन्क., साउथफील्ड, एम आई, 1992.

54. लैम्प्रेच्ट, जे. एल. Implementing the ISO 9000 Series, ए एस क्यू सी क्वालिटी प्रेस, विस्कोन्सिन, 1993, p. 57.

55. इन्टरनेशनल ऑर्गनाइजेशन फॉर स्टैन्डर्डाइजेशन : Generic Guidelines for the Application of ISO 9001, ISO 9002 and ISO 9003, जेनेवा, स्विट्जरलैंड, 1991.

56. गोएत्स, डी. एल. तथा डेविस, एस. : Understanding and Implementing ISO 9000 and other ISO Standards, प्रेन्टिस-हॉल, न्यूजर्सी, 1997.

57. बाग्ची, टी. पी. : ISO 9000 : Concepts, Methods and Implementation, व्हीलर पब्लिशिंग, नई दिल्ली, 1966, p. 29.

58. स्लिकमैन, जे. जे. : ISO 9000 : Quality Management System Design, ए एस क्यू सी क्वालिटी प्रेस, विस्कोन्सिस, 1998.

59. विल्सन, एल. ए. : Eight Step–Process to Successful ISO Implementation, ए एस क्यू सी क्वालिटी प्रेस, विस्कोन्सिन, 1996.

60. डौब, एफ. पी. : ISO 9000 : Quality Registration Step by Step, बटरवर्थ हाइनमैन, ऑक्सफोर्ड, 1996, p. 31.

61. लैम्प्रेच्ट, जे. एल. : ISO 9000 : Preparing for Registration, ए एस क्यू सी क्वालिटी प्रेस, विस्कोन्सिन, 1992, p. 137.

62. बीऑमौन्ट, एल. आर. ISO 9001, the Standard Companion, आई एस ओ इजी., मिडलटाउन, न्यूजर्सी, 1996.

63. हैरिंगटन, एच. जे. तथा मैथर्स, डी. डी. : ISO 9000 and Beyond : From Compliance to Performance Improvement, मैक्ग्रा-हिल, इन्क., न्यूयॉर्क, 1997, p. 136.

64. रैथरी, बी. : ISO 9000, गोवर, ब्रुकफील्ड, वी टी, 1993, p. 97.

65. जे यू एस ई : T Q C Solutions, प्रोडक्टिविटी प्रेस, कैम्ब्रिज, मैसाचूसेट्स, 1991.

66. A New Era for Auto Quality, बिजनेस वीक, 1990, p. 82.

67. बारलैस, एस. US Companies feverishly seek ISO 9000 Registration, मैनेजिंग ऑटोमेशन, 1992, p. 70.

68. बीऑमौन्ट, एल. आर. : ISO 9001–The Standard Interpretation, आई एस ओ इजी, मिडलटाउन, न्यूजर्सी, 1995, p. 97.

69. स्ट्रैटन, जे. एच. : What is the Registrar Accreditation Board, क्वालिटी प्रोग्रेस 1992, , p.67.

70. सेन्जी, पी. एम., The Leader's New Work : Building Learning Organisations, स्लोएन मैनेजमेंट रिव्यू, फॉल 1990, p. 7.

71. बेस्टरफील्ड, डी. एच., बेस्टरफील्ड-मिशना, सी., बेस्टरफील्ड, जी. एच., तथा बेस्टरफील्ड–सेक्री, एम. : Total Quality Management, प्रेन्टिस हॉल, न्यूयॉर्क, 1995.

72. बाउन्ड्स, जी. एल., यौर्क्य, एम. ए. तथा रैनी, जी. : Beyond Total Quality Mangement : Toward the Emerging Paradigm, मैक्ग्रा-हिल, इन्क., न्यूयॉर्क, 1994, p. 37.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपिं और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 12 पौंड या 40 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 3 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 100 or £ 12 or $ 40
Per Vol. Rs. 25 or 3£ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद–2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad, 211 002, India

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर
७ बेली एवन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854 640405

ISSN : 0505 - 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 43 July 2000 No.3



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 43 July 2000 No.3

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No.3, July, 2000.

बहुचर I-फलन तथा सामान्य श्रेणी के बहुपदों वाले समाकल

चेना राम तथा होशियार सिंह
गणित तथा सांख्यिकी विभाग,
जय नारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त – सितम्बर 6, 1999]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य प्रसाद के बहुचर I-फलन वाले आयलर-समाकलों की किसी श्रेणी का तथा श्रीवास्तव द्वारा दिये गये बहुचरों की सामान्य श्रेणी का मूल्यांकन करना है। जिन परिणामों को सिद्ध किया गया है वे सामान्य प्रकृति के है और उनमें, इसके पूर्व सक्सेना इत्यादि, शर्मा तथा राठी और अरोरा तथा राठी द्वारा दिये गये परिणाम सम्मिलित हैं।

Abstract

Integrals involving multivariate I-function and a general class of polynomials. *By* Chena Ram and Hoshiyar Singh, Department of Mathematics & Statistics, Jai Narain Vyas University, Jodhpur (Raj.).

The object of the present paper is to evaluate a certain class of Eulerian integrals involving multivariable I-function due to Prasad[6] and a general class of polynomials given by Srivastava[10]. The results proved are of general character and include the results given earlier by Saxena *et al.*[8], Sharma & Rathie[9] Arora & Rathie[1] etc. Due to most general character of the results derived in this, numerous results on potentially useful higher transcendental functions of one or more variables follow, as special cases.

1. प्रस्तावना

प्रसाद[6] का अनुसरण करते हुए हम बहुचर I-फलन को निम्नवत् परिभाषित करते हैं–

$$I[z_1, \ldots, z_r] = I^{0, n_2; 0, n_3; \ldots; 0, n_r; (m', n'); (m'', n''); \ldots; (m^{(r)}, n^{(r)})}_{p_2, q_2; p_3, q_3; \ldots; p_r, q_r; (p', q'); (p'', q''); \ldots; (p^{(r)}, q^{(r)})} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} A \\ \\ B \end{matrix} \right]$$

$$= \frac{1}{(2 \pi w)^r} \int_{L_1} \ldots \int_{L_r} \varphi_1 (\xi_r) \, \Psi(\xi_1, \ldots, \xi_r) \, z_1^{\xi_1} \ldots z_r^{\xi_r} \, . \, d\xi_1 \ldots d\xi_r \qquad (1.1)$$

जहाँ $w = \sqrt{-1}$;

$$A = \left(a_{2j}; \alpha'_{2j}, \alpha''_{2j}\right)_{1, p_2}; \left(a_{3j}; \alpha'_{3j}, \alpha''_{3j}, \alpha'''_{3j}\right)_{1, p_3}; \ldots;$$
$$\left(a_{rj}; \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1, p_r}; \left(a'_j, \alpha'_j\right)_{1, p'}; \ldots; \left(a^{(r)}_j, \alpha^{(r)}_j\right)_{1, p^{(r)}}$$

$$B = \left(b_{2j}; \beta'_{2j}, \beta''_{2j}\right)_{1, q_2}; \left(b_{3j}; \beta'_{3j}, \beta''_{3j}, \beta'''_{3j}\right)_{1, q_3}; \ldots;$$
$$\left(b_{rj}; \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1, q_r}; \left(b'_j, \beta'_j\right)_{1, q'}; \ldots; \left(b^{(r)}_j, \beta^{(r)}_j\right)_{1, q^{(r)}}$$

$$\phi_i(\xi_i) = \frac{\prod_{j=1}^{m^{(i)}} \Gamma\left(b^{(i)}_j - \beta^{(i)}_j \xi_i\right) \prod_{j=1}^{n^{(i)}} \Gamma\left(1 - a^{(i)}_j + \alpha^{(i)}_j \xi_i\right)}{\prod_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \Gamma\left(1 - b^{(i)}_j + \beta^{(i)}_j \xi_i\right) \prod_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \Gamma\left(a^{(i)}_j - \alpha^{(i)}_j \xi_i\right)}$$

$$\forall i \in \{1, \ldots, r\} \qquad (1.2)$$

$$\Psi(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \frac{\prod_{j=1}^{n_2} \Gamma\left(1 - a_{2j} + \sum_{i=1}^{2} \alpha^{(i)}_{2} \xi_i\right) \prod_{j=1}^{n_3} \Gamma\left(1 - a_{3j} + \sum_{i=1}^{3} \alpha^{(i)}_{3j} \xi_i\right) \ldots}{\prod_{j=n_2+1}^{p_2} \Gamma\left(a_{2j} - \sum_{i=1}^{2} \alpha^{(i)}_{2j} \xi_i\right) \prod_{j=n_3+1}^{p_3} \Gamma\left(a_{3j} - \sum_{i=1}^{3} \alpha^{(i)}_{3j} \xi_i\right) \ldots}$$

$$\frac{\ldots \prod_{j=1}^{n_r} \Gamma\left(1 - a_{rj} + \sum_{i=1}^{r} \alpha^{(i)}_{rj} \xi_i\right)}{\ldots \prod_{j=n_r+1}^{p_r} \Gamma\left(a_{rj} - \sum_{i=1}^{r} \alpha^{(i)}_{rj} \xi_i\right) \prod_{j=1}^{q_2} \Gamma\left(1 - b_{2j} + \sum_{i=1}^{2} \beta^{(i)}_{2j} \xi_i\right)}$$

$$\times \frac{1}{\prod_{j=1}^{q_3} \Gamma\left(1-b_{3j}+\sum_{i=1}^{3} \beta_{3j}^{(i)} \xi_i\right) \cdots \prod_{j=1}^{q_r} \Gamma\left(1-b_{rj}+\sum_{i=1}^{r} \beta_{rj}^{(i)} \xi_i\right)} \tag{1.3}$$

I-फलन के कंटूरों, उपगामी प्रसार तथा विभिन्न गुणों के लिए पाठकों को चाहिए कि प्रसाद[6] का मूल प्रपत्र पढ़ें।

श्रीवास्तव[10] का अनुसरण करते हुए बहुपदों की सामान्य श्रेणी को निम्नवत् परिभाषित किया जाता है –

$$S_{\beta}^{\alpha}[x] = \sum_{u=0}^{[\beta/\alpha]} \frac{(-\beta)_{\alpha u}}{u!} A_{\beta,u} (x)^u ; \ \beta = 0, 1, 2, ... \tag{1.4}$$

जहाँ α यादृच्छिक धन पूर्णांक है और गुणांक $A_{\beta,u}$ $(\beta, u > 0)$ यादृच्छिक अचर है जो वास्तविक या संमिश्र है। गुणांकों $A_{\beta,u}$ के उपयुक्त विशिष्टीकरण से $S_{\beta}^{\alpha}[x]$ से अनेक ज्ञात बहुचर प्राप्त होते हैं[13]

आगे हम धन पूर्णांकों के सेट को N द्वारा, अनृण पूर्णांकों को N_o द्वारा, वास्तविक संख्याओं को R_+ द्वारा तथा संमिश्र संख्याओं को C_+ द्वारा अं कित करें गे ।

2. समाकल

यहाँ पर निम्नांकित परिणामों की स्थापना की जावेगी –

प्रथम समाकल

$$\int_o^1 t^{\rho-1} (1-t)^{\rho} [1+at+b(1-t)]^{-2\rho-1}$$

$${}_2F_1\left[\gamma, \delta; \frac{1}{2}(\gamma+\delta+2); \frac{t(1+a)}{1+at+b(1-t)}\right] S_{\beta}^{\alpha}\left[x R^k\right] I\left[z_1 R_1^{\lambda_1}, \ldots, z_r R_r^{\lambda_r}\right] dt$$

जहाँ

$$= \frac{2^{\gamma+\delta-2\rho-1} \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}+1\right)}{(\gamma-\delta)(1+a)(1+b)^{\rho+1} \Gamma(\gamma)\Gamma(\delta)} \sum_{u=0}^{[\beta/\alpha]} \frac{(-\beta)_{\alpha u}}{u!} A_{\beta,u} (x)^u$$

$$\times \left\{ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) I^{\,0,n_2;\,\dots;\,0,\,n_r+3;\,(m',\,n');\,\dots;\,(m^{(r)},\,n^{(r)})}_{\,p_2,q_2;\,\dots;\,p_r+3,\,q_r+3;\,(p',\,q');\,\dots;\,(p^{(r)},\,q^{(r)})} \left[\begin{array}{c|c} z_1 & I_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & I_2 \end{array}\right]\right.$$

$$- \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}\right) I^{\,0,n_2;\,\dots;\,0,\,n_r+3;\,(m',\,n');\,\dots;\,(m^{(r)},\,n^{(r)});\,\dots;\left(m^{(r)},\,n^{(r)}\right)}_{\,p_2,q_2;\,\dots;\,p_r+3,\,q_r+3;\,(p',\,q');\,\dots;\,(p^{(r)},\,q^{(r)});\,\dots;\left(p^{(r)},\,q^{(r)}\right)} \left[\begin{array}{c|c} z_1 & J_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & J_2 \end{array}\right] \tag{2.1}$$

जहाँ

$$R = R_1 = \frac{4\,(t+a\,t)\,(1+b)\,(1-t)}{[1+a\,t+b\,(1-t)\,]^2}; \qquad \forall \mathrm{i} \in \{1,2,\dots,\mathrm{r}\} \tag{2.2}$$

$$I_1 = \left(a_{2j};\,\alpha'_{2j},\,\alpha''_{2j}\right)_{1,p_2};\;\left(a_{3j};\,\alpha'_{3j},\,\alpha''_{3j},\,\alpha'''_{3j}\right)_{1,p_3};\dots;$$

$$\left(a_{rj};\,\alpha'_{rj},\dots,\alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r};\;\left(1-\rho-k\,u;\,\lambda_1,\,\dots,\,\lambda_r\right);$$

$$\left(1-\rho-k\,u+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2};\;\lambda_1,\dots,\lambda_r\right);\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}-\rho-k\,u;\,\lambda_1,\dots,\lambda_r\right);$$

$$\left(a'_j,\,\alpha'_j\right)_{1,p'};\dots;\left(a^{(r)}_j,\,\alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}} \tag{2.3}$$

$$I_2 = \left(b_{2j};\,\beta'_{2j},\beta''_{2j}\right)_{1,q_2};\;\left(b_{3j};\,\beta'_{3j},\,\beta''_{3j},\,\beta'''_{3j}\right)_{1,q_3};\dots;$$

$$\left(b_{rj};\,\beta'_{rj},\dots,\beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,q_r};\;\left(1-\rho-k\,u+\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2};\,\lambda_1,\dots,\lambda_r\right);$$

$$\left(\frac{\gamma}{2}-\rho-k\,u;\lambda_1,\dots,\lambda_r\right);\;\left(\frac{1}{2}+\frac{\delta}{2}-\rho-k\,u;\;\lambda_1,\dots,\lambda_r\right);$$

$$\left(b_j', \beta_j'\right)_{1,q'}; \ldots; \left(b_j^{(r)}, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q^{(r)}} \tag{2.4}$$

$$J_1 = \left(a_{2j}; \alpha_{2j}', \alpha_{2j}''\right)_{1,p_2}; \left(a_{3j}; \alpha_{3j}', \alpha_{3j}'', \alpha_{3j}'''\right)_{1,p_3}; \ldots;$$

$$\left(a_{rj}; \alpha_{rj}', \ldots, \alpha_{rj}^{(r)}\right)_{1,p_r}; \left(1-\rho-ku; \lambda_1; \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(1-\rho-ku+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right); \left(\frac{\delta}{2}-\frac{\gamma}{2}-\rho-ku; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(a_j', \alpha_j'\right)_{1,p'}; \ldots; \left(a_j^{(r)}, \alpha_j^{(r)}\right)_{1,p^{(r)}} \tag{2.5}$$

$$J_2 = \left(b_{2j}; \beta_{2j}', \beta_{2j}''\right)_{1,q_2}; \left(b_{3j}; \beta_{3j}', \beta_{3j}'', \beta_{3j}'''\right)_{1,q_3}; \ldots;$$

$$\left(b_{rj}; \beta_{rj}', \ldots, \beta_{rj}^{(r)}\right)_{1,q_r}; \left(1-\rho-ku-\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(\frac{\delta}{2}-\rho-ku; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right); \left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{2}-\rho-ku; \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(b_j', \beta_j'\right)_{1,q'}; \ldots; \left(b_j^{(r)}, \beta_j^{(r)}\right)_{1,q^{(r)}} \tag{2.6}$$

जो सत्य उतरता है बशर्ते निम्नलिखित प्रतिबन्ध सत्य हों (उपयुक्त अभिसरण तथा अस्तित्व प्रतिबन्धों के अतिरिक्त)

(A) $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \alpha_{kj}^{(i)}, \beta_{kj}^{(i)} \in IR_+ \ (i=1,\ldots,r;\ k=2,\ldots,r)$:

$a_j^{(i)} \ (i=1,\ldots,r;\ j=1,\ldots,p^{(I)}),\ b_j^{(i)} \ (i=1,\ldots,r; j=1,\ldots,q^{(i)})$

(B) $a_{kj}\,(k= \,,\ldots,r\,;\, j=1,\ldots,p_r),\; b_{kj}\;(k=2,\ldots,r\,;\, j=1,\ldots,q_r) \in c\,;$

तथा

$$m^{(i)},\, n^{(i)},\, p^{(i)},\, q^{(i)},\, n_k,\, p_k,\, q_k\;\; (i=1,\ldots,r\,;\, k=2,\ldots,r) \in N_o$$

(i) अचर a तथा b ऐसे हैं कि व्यंजकों

$$1+a\,,\; 1+b\,,\; 1+a\,t+(1-t) \tag{2.7}$$

में से कोई भी शून्य नहीं है, जहाँ $0 \le t \le 1$,

$$\text{(ii)}\quad \mathrm{Re}\,(\rho) > 0\,,\; \mathrm{Re}\,(2\rho-\gamma-\delta) > 0\,,\; k \ge 0 \tag{2.8}$$

$$\text{(iii)}\quad \mathrm{Re}\left[\, \rho + ku + \min_{\substack{1\le i\le r \\ 1\le j\le m^{(i)}}} \lambda_i \left\{ \mathrm{Re}\left(b_j^{(i)} / \beta_j^{(i)} \right)\right\}\right] > 0$$

$$\lambda_i \ge \;\; \forall \iota, \upsilon = 0, 1, \ldots, (\beta/\alpha) \tag{2.9}$$

$$\text{(iv)}\quad \Delta_i\;.\;\; 0\,,\; |\,ar\,z_i| < \frac{1}{2}\,\pi\,\Delta_i; \qquad \forall_i \in \{1,2,\ldots,r\} \tag{2.10}$$

जहाँ

$$\Delta_i := \sum_{j=1}^{n^{(i)}} \alpha_j^{(i)} - \sum_{j=n^{(i)}+1}^{p^{(i)}} \alpha_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{m^{(i)}} \beta_j^{(i)} - \sum_{j=m^{(i)}+1}^{q^{(i)}} \beta_j^{(i)}$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n_2} \alpha_{2j}^{(i)} - \sum_{j=n_2+1}^{p_2} \alpha_{2j}^{(i)} \right) + \left(\sum_{j=1}^{n_3} \alpha_{3j}^{(i)} - \sum_{j=n_3+1}^{p_3} \alpha_{3j}^{(i)} \right) + \ldots$$

$$+ \left(\sum_{j=1}^{n_r} \alpha_{rj}^{(i)} - \sum_{j=n_r+1}^{p_r} \alpha_{rj}^{(i)} \right) - \left(\sum_{j=1}^{q_2} \beta_{2j}^{(i)} + \sum_{j=1}^{q_3} \beta_{3j}^{(i)} + \ldots + \sum_{j=1}^{q_r} \beta_{rj}^{(i)} \right),$$

$$\forall i \in 1,\ldots,r\}.$$

द्वितीय समाकल :

$$\int_o^1 t^{\rho-1}(1-t)^{\rho-2}[1+at+b(1-t)]^{-2\rho+1}\,{}_2F_1\left[\gamma,\delta;\frac{1}{2}(\gamma+\delta);\frac{t(1+a)}{1+at+b(1-t)}\right]$$

$$.S_\beta^\alpha\left[x\ R^k\right]I\left[z_1 R_1^{\lambda_1},\ \ldots,\ z_r R_r^{\lambda_r}\right]dt$$

$$=\frac{2^{\gamma+\delta-2\rho}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}{(1+a)^{\rho}(1+b)^{\rho-1}\ \Gamma(\gamma)\,\Gamma(\delta)}\sum_{u=0}^{[\beta/\alpha]}\frac{(-\beta)_{\alpha u}}{u!}A_{\beta,u}\ (x)^u$$

$$.\left\{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right)I^{\,0,n_2;\ldots;0,n_{r+3};(m',n');\ldots;}_{\,p_2,q_2;\ldots;p_r+3,q_r+3;(p',q');\ldots;}\right.$$

$$\begin{matrix}(m^{(r)},\ n^{(r)})\\(p^{(r)},\ q^{(r)})\end{matrix}\left[\begin{matrix}z_1\\ \cdot\\ \cdot\\ z_r\end{matrix}\left|\begin{matrix}E_1\\ \\ \\ E_2\end{matrix}\right.\right]+\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\left.\cdot\,I^{\,0,n_2;\ldots;0,n_2+3;(m',n');\ldots;(m^{(r)},n^{(r)}}_{\,p_2,q_2;\ldots;p_r+3,q_r+3;(p',q');\ldots,(p^{(r)},q^{(r)})}\left[\begin{matrix}z_1\\ \cdot\\ \cdot\\ z_r\end{matrix}\left|\begin{matrix}G_1\\ \\ \\ G_2\end{matrix}\right.\right]\right\}\qquad(2.11)$$

जहाँ R, R_1, ..., R_r को (2.2) द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$$E_1=\left(a_{2j};\alpha'_{2j},\alpha''_{2j}\right)_{1,p_2};\ \left(a_{3j};\alpha'_{3j},\ \alpha''_{3j},\alpha'''_{3j}\right)_{1,p_3};\ldots;$$

$$\left(a_{rj};\ldots,\alpha'_{rj},\ldots,\alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,p_r};\left(2-\rho-ku;\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right)$$

$$\left(2-\rho-ku+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2};\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right);\left(1+\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2}-\rho-ku;\lambda_1,\ldots,\lambda_r\right);$$

$$\left(a'_j,\alpha'_j\right)_{1,p'};\ldots;\left(a^{(r)}_j,\ \alpha^{(r)}_j\right)_{1,p^{(r)}}\qquad(2.12)$$

$$E_2 = \left(b_{2j};\, \beta'_{2j};\, \beta''_{2j}\right)_{1,\,q_2};\, \left(b_{3j};\, \beta'_{3j},\, \beta''_{3j},\, \beta'''_{3j}\right)_{1,\,q_3};\, \ldots;$$

$$\left(b_{rj};\, \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,\,q_r};\, \left(2-\rho-ku+\frac{\gamma}{2}-\frac{\delta}{2};\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(1+\frac{\gamma}{2}-\rho-ku;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);\, \left(\frac{3}{2}+\frac{\delta}{2}-\rho-ku;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(b'_j, \beta'_j\right)_{1,\,q'};\, \ldots;\, \left(b^{(r)}_j,\, \beta^{(r)}_j\right)_{1,\,q^{(r)}} \tag{2.13}$$

$$G_1 = \left(a_{2j};\, \alpha'_{2j},\, \alpha''_{2j}\right)_{1,\,p_2};\, \left(a_{3j};\, \alpha'_{3j},\, \alpha''_{3j},\, \alpha'''_{3j}\right)_{1,\,p_3};\, \ldots;$$

$$\left(a_{rj};\, \alpha'_{rj}, \ldots, \alpha^{(r)}_{rj}\right)_{1,\,p_r};\, \left(2-\rho-ku;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(2-\rho-ku+\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2};\, \lambda_1; \ldots, \lambda_r\right);\, \left(1+\frac{\delta}{2}-\frac{\gamma}{2}-\rho-ku;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(a'_j,\, \alpha'_j\right)_{1,\,p'};\, \ldots;\, \left(a^{(r)}_j,\, \alpha^{(r)}_j\right)_{1,\,p^{(r)}} \tag{2.14}$$

$$G_2 = \left(b_{2j};\, \beta'_{2j},\, \beta''_{2j}\right)_{1,\,q_2};\, \left(b_{3j};\, \beta'_{3j},\, \beta''_{3j},\, \beta'''_{3j}\right)_{1,\,q_3};\, \ldots;$$

$$\left(b_{rj};\, \beta'_{rj}, \ldots, \beta^{(r)}_{rj}\right)_{1,\,q_r};\, \left(2-\rho-ku-\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2};\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(1+\frac{\delta}{2}-\rho-ku;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);\, \left(\frac{3}{2}+\frac{\gamma}{2}-\rho-ku;\, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\right);$$

$$\left(b'_j,\, \beta'_j\right)_{1,\,q'};\, \ldots;\, \left(b^{(r)}_j,\, \beta^{(r)}_j\right)_{1,\,q^{(r)}} \tag{2.15}$$

जो सही उतरता है बशर्ते कि (2.1) में दिये गये प्रतिबन्ध *(A)* तथा *(B)* के साथ-साथ निम्नांकित प्रतिबन्ध भी सत्य हों–

(i) प्रतिबन्ध (2.7) तथा (2.8) सही हों।

(ii) $\text{Re}(\rho) > 1, \text{Re}(2\rho - \gamma - \delta) > 2;\ k \geq 0$

(iii) $\text{Re}\left[\rho + ku + \min_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq m^*}} \lambda_i \left\{\text{Re}\left(b_j^{(i)}/\beta_j^{(i)}\right)\right\}\right] > 1, \lambda_i \geq 0\ \forall\, i$(२.१६)

तृतीय समाकल

$$\int_0^{\pi/2} e^{w(2\rho+1)\theta} (\sin\theta)^{\rho} (\cos\theta)^{\rho-1} {}_2F_1\left[\gamma, \delta; \frac{1}{2}(\gamma+\delta+2);\ e^{w\theta}\cos\theta\right]$$

$$.\ S_{\beta}^{\alpha}\left[x\, T^k\right] I\left[z_1 T_1^{\lambda_1}, \ldots, z_r T_r^{\lambda_r}\right] d\theta$$

$$= \frac{e^{(w(\rho+1)/2)\pi}\, \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}+1\right)}{2^{2\rho-\gamma-\delta+1}\, \Gamma(\gamma)\, \Gamma(\delta)\, \Gamma(\gamma-\delta)} \sum_{u=0}^{[\beta/\alpha]} \frac{(-\beta)_{\alpha u}}{(u)!} A_{\beta, u}\, (x)^u$$

$$\left\{ \Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right) \Gamma\left(-\frac{\delta}{2}\right) I^{0, n_2; \ldots; 0, 0, n_r+3; (m', n'); \ldots;}_{p_2, q_2; \ldots; p_r+3, q_r+3 (p', q') \ldots;} \right.$$

$$\left. \begin{matrix} (m^{(r)}, n^{(r)}) \\ (p^{(r)}, q^{(r)}) \end{matrix} \left[\begin{array}{c|c} z_1 & I_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & I_2 \end{array}\right] + \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}\right) \right.$$

$$\left. \times\ I^{0, n_2; \ldots; 0, n_2+3; (m', n'); \ldots; (m^{(r)}, n^{(r)})}_{p_2, q_2; \ldots; p_r+3, q_r+3; (p', q'); \ldots, (p^{(r)}, q^{(r)})} \left[\begin{array}{c|c} z_1 & J_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & J_2 \end{array}\right] \right\} \tag{2.17}$$

जहाँ I_1, I_2, J_1 तथा J_2 को क्रमशः (2.3), (2.4), (2.5) तथा (2.6) द्वारा परिभाषित किया जाता है तथा इतना ही नहीं

$$T = T_i = \frac{4\,e^{2w\theta}\ \sin\theta\ \cos\theta}{e^{w\pi/2}},\ \forall \mathrm{i}\ \in \{1, 2, \ldots, r\} \tag{2.18}$$

जो सही उतरता है बशर्ते (2.1) में दिये गये प्रतिबन्ध *(A)* तथा *(B)* निम्नांकित प्रतिबन्ध के साथ-साथ सत्य हों।

(i) $\mathrm{Re}\,(\rho) > 0,\ \mathrm{Re}\,(2\rho - \gamma - \delta) > 0,\ k \geq 0$

(ii) $\mathrm{Re}\left[\rho + k\,u + \min\limits_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq m^{(i)}}} \lambda_i \left\{\mathrm{Re}\left(b_j^{(i)} / \beta_j^{(i)}\right)\right\}\right] > 0,\quad \lambda_i \geq 0\ \ \forall\ \mathrm{i}$

चतुर्थ समाकल

$$\int_{o}^{\pi/2} e^{w(2\rho-1)\theta} (\sin\theta)^{\rho-2} (\cos\theta)^{\rho-1}\ {}_2F_1\left[\gamma, \delta;\ (\gamma+\delta)/2\ ;\ e^{w\theta}\ \cos\theta\right]$$

$$\cdot\ S_{\beta}^{\alpha}\left[x\ T^{k}\right] I\left[z_1\ T_1^{\lambda_1}, \ \ldots, z_r\ T_r^{\lambda_r}\right] d\theta$$

$$= \frac{e^{(w\pi(\rho-1)/2)}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}{2^{2\rho-\gamma-\delta}\ \Gamma\ (\gamma)\ \Gamma\ (\delta)} \sum_{u=0}^{[\beta/\alpha]} \frac{(-\beta)_{\alpha u}}{u\,!} A_{\beta,\,u}\ (x)^{u}$$

$$\left\{ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) I^{0,\,n_2;\,\ldots;\,0,\,n_r+3;\,(m',\,n');\,\ldots;}_{p_2,\,q_2;\,\ldots;\,p_r+3,\ q_r+3\,(p',\,q')\ \ldots;}\right.$$

$$\begin{matrix}(m^{(r)},\ n^{(r)}) \\ (p^{(r)},\ q^{(r)})\end{matrix}\left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} E_1 \\ \\ \\ E_2 \end{matrix}\right] + \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\left. \cdot\ I^{0,\,n_2;\,\ldots;\,0,\,n_2+3;\,(m',\,n');\,\ldots;\,(m^{(r)},\ n^{(r)})}_{p_2,\,q_2;\,\ldots;\,p_r+3,\,q_r+3;\,(p',\,q');\,\ldots,\,(p^{(r)},\ q^{(r)})} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix}\ \middle|\ \begin{matrix} G_1 \\ \\ \\ G_2 \end{matrix}\right]\right\} \tag{2.20}$$

जहाँ $T, T_1, \ldots\ldots, T_r$ को (2.18) द्वारा तथा E_1, E_2, G_1 एवं G_2 को क्रमशः (2.12), (2.13), (2.14) एवं (2.15) द्वारा परिभाषित किया जाता है और जो सही उतरता है बशर्ते कि (2.1) में दिये गये प्रतिबन्धों (A) तथा (B) के साथ-साथ निम्नांकित प्रतिबन्ध भी सत्य हों।

(i) $\mathrm{Re}(\rho) > 0$, $\mathrm{Re}(2\rho - \gamma - \delta) > 2$, $k \geq 0$

(ii) $$\mathrm{Re}\left[\rho + ku + \min_{\substack{1 \leq i \leq r \\ 1 \leq j \leq m^{(i)}}} \lambda_i \left\{\mathrm{Re}\left(b_j^{(i)} / \beta_j^{(i)}\right)\right\}\right] > 0,\ \lambda_i \geq 0 \quad \forall\ i \tag{2.21}$$

(iii) (2.16) भी सही उतरता है।

पंचम समाकल

$$\int_0^{\pi/2} e^{w(2\rho+1)\theta} (\sin\theta)^{\rho-1} (\cos\theta)^{\rho}\ {}_2F_1\left[\gamma, \delta; \left(\frac{\gamma+\delta+2}{2}\right); e^{w(\theta-\frac{\pi}{2})} \sin\theta\right]$$

$$\cdot\ S_\beta^\alpha\left[x\, T^k\right] I\left[z_1\, T_1^{\lambda_1}, \ldots, z_r\, T_r^{\lambda_r}\right] d\theta$$

$$= \frac{e^{w\pi\rho/2}\ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}+1\right)}{2^{2\rho-\gamma-\delta+1} (\gamma-\delta\ \Gamma(\gamma)\ \Gamma(\delta)} \sum_{u=0}^{[\beta/\alpha]} \frac{(-\beta)_{\alpha u}}{u!} A_{\beta,u}\, (x)^u$$

$$\cdot \left\{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) I^{0, n_2; \ldots; 0, n_r+3; (m', n'); \ldots;}_{p_2, q_2; \ldots; p_r+3,\ q_r+3\, (p', q') \ldots;}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(m^{(r)}, n^{(r)}) \\ (p^{(r)}, q^{(r)})\end{matrix}\right)\left[\begin{array}{c|c} z_1 & I_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & I_2 \end{array}\right] - \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\left. I^{0, n_2; \ldots; 0, n_r+3; (m', n'); \ldots; (m^{(r)}, n^{(r)})}_{p_2, q_2; \ldots; p_r+3, q_r+3; (p', q'); \ldots, (p^{(r)}, q^{(r)})} \left[\begin{array}{c|c} z_1 & J_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ z_r & J_2 \end{array}\right]\right\} \tag{2.22}$$

जहाँ $T, T_1, T_2, \ldots, T_r$ को (2.18) द्वारा एवं I_1, I_2, J_1 तथा J_2 को क्रमशः (2.3), (2.4), (2.5) एवं (2.6) द्वारा परिभाषित करते हैं जो सही उतरता है बशर्ते कि (2.1) में दिये गये प्रतिबन्ध *(A)* तथा *(B)* निम्नांकित प्रतिबन्धों के साथ-साथ सत्य उतरें।

(i) $\text{Re}(\rho) > 0$, $\text{Re}(2\rho - \gamma - \delta) > 0$, $k \geq 0$

(iii) प्रतिबन्ध (2.16) सही उतरता है।

षष्ठम समाकल :

$$\int_0^{\pi/2} e^{w(2\rho-1)\theta} (\sin\theta)^{\rho-1} (\cos\theta)^{\rho-2} \, {}_2F_1\left[\gamma, \delta; \left(\frac{\gamma+\delta}{2}\right); e^{w(\theta-\frac{\pi}{2})} \sin\theta\right]$$

$$\cdot \, S_\beta^\alpha\left[x\, T^k\right] I\left[z_1\, T_1^{\lambda_1}, \ldots, z_r\, T_r^{\lambda_r}\right] d\theta$$

$$= \frac{e^{w\pi\rho/2}\, \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{\delta}{2}\right)}{2^{2\rho-\gamma-\delta}\, \Gamma(\gamma)\, \Gamma(\delta)} \sum_{u=0}^{[\beta/\alpha]} \frac{(-\beta)_{\alpha u}}{u!} A_{\beta,u}\, (x)^u$$

$$\times \left\{ \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta}{2}\right) I^{0, n_2; \ldots; 0, n_r+3; (m', n'); \ldots;}_{p_2, q_2; \ldots; p_r+3,\, q_r+3\, (p', q') \ldots;} \right.$$

$$\left. \begin{matrix}(m^{(r)}, n^{(r)}) \\ (p^{(r)}, q^{(r)})\end{matrix} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} E_1 \\ \\ E_2 \end{matrix}\right] + \Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\delta}{2}+\frac{1}{2}\right) \right.$$

$$\left. I^{0, n_2; \ldots; 0, n_r+3; (m', n'); \ldots; (m^{(r)}, n^{(r)})}_{p_2, q_2; \ldots; p_r+3, q_r+3; (p', q'); \ldots, (p^{(r)}, q^{(r)})} \left[\begin{matrix} z_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ z_r \end{matrix} \middle| \begin{matrix} G_1 \\ \\ G_2 \end{matrix}\right] \right\} \tag{2.23}$$

जहाँ $T, T_1, \ldots, T_r$ को (2.18) द्वारा तथा E_1, E_2, G_1 तथा G_2 को क्रमशः (2.12), (2.13), (2.14) एवं (2.15) द्वारा परिभाषित किया जाता है जो सही उतरता है बशर्ते कि (2.1) में दिये गये प्रतिबन्ध *(A)* तथा *(B)* निम्नांकित प्रतिबन्धों के साथ सत्य उतरते हैं।

(i) $\text{Re}(\rho) > 1$, $\text{Re}(2\rho - \gamma - \delta) > 2$, $k \geq 0$

(ii) प्रतिबन्ध (2.16) तथा (2.21) भी सत्य हैं।

(2.1) की उत्पत्ति : समाकल (2.1) का मान ज्ञात करने के लिए सर्वप्रथम हम बहुचर I-फलन के बहुगुणित मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल (1.1) के पदों में व्यक्त करते हैं, फिर (1.4) का प्रयोग करके तथा ξ_1-समाकलों तथा t- समाकल का क्रम परस्पर विनिमय करने पर, जो निहित समाकलों के परम अभिसरण के कारण अनुमत हैं तथा अन्त में t-समाकल का मान ज्ञात परिणामों[9] की सहायता से निकालने तथा (1.1) की सहायता से परिणामी समाकल की व्याख्या करने पर वांछित परिणाम सरलता से प्राप्त हो जाता है। शेष परिणामों (2.11), (2.17), (2.20), (2.22) एवं (2.23) को इसी तरह से समाकलों [9, pp. 26–28, Eqs. (2.2) (2.6)] के प्रयोग से सिद्ध किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

(2.1), (2.11), (2.17), (2.20), (2.22) तथा (2.23) में $n_2 = n_3 = \ldots = n_{r-1} = 0 = p_2 = p_3 = \ldots = p_{r-1}$ तथा $q_2 = q_3 = \ldots = q_{r-1} = 0$ रखने से इसके पूर्व सक्सेना इत्यादि[8] द्वारा दिये गये परिणाम प्राप्त होते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक द्वय इस प्रपत्र की तैयारी में प्रो० आर० के० सक्सेना से प्राप्त सहायता के लिए आभारी हैं।

निर्देश

1. अरोरा, कमल तथा राठी, ए० के० : J. Fractional Calulus, 1992, 1, 79–86.
2. लैबोई, जे० एल० : Math. Computation, 1987, 49, No. 179, 269–274.
3. लैबोई, जे० एल०, ग्रोनेडीन, एफ० तथा राठी, ए० के० : Indian J. Math., 1992, 34, 23–32.
4. मैकराबर्ट, टी० एम० : Math. Annalaen, 1961, 142, 450–452.
5. मथाई, ए० एम० तथा सक्सेना, आर० के० : The H-function with Applications in Statistics and other Disciplines, John Wiley & Sons, New York (1978).
6. प्रसाद, वाई० एन० : विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1986, 29, 231.
7. रेनविले, ई० डी० : Special Functions, MacMillan, New York, 1960.
8. सक्सेना, आर० के०, चेनाराम तथा दबे, ओ० पी० : ज्ञानाभ, 1994, 24, 35–4.

9. शर्मा, जी० तथा राठी, ए० के० : विज्ञान परिषद अनुसन्धान पत्रिका, 1991, 34, 24–30.

10. श्रीवास्तव, एच० एम० : Indian J. Math., 1972, 14, 1–6.

11. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पण्डा, आर० : J. Reine Angew, Math., 1976, 283/284, 2652–74.

12. श्रीवास्तव, एच० एम० गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० पी० : The H-functions of one and two variables with Applications, South Asian Publishers, New Delhi, 1982.

13. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा सिंह, एन० पी० : Rend. Circ. Mat. Palermo, 1983, 32(2), 157–187.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 3, July 2000.

सार्वीकृत बेटमैन फलन की अष्टि वाले समाकल समीकरण का प्रतिलोमन

भावना सोनी
गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरी महाविद्यालय, उज्जैन
तथा
नीतू त्रिवेदी
वैष्णव एकेडेमी, इन्दौर

[प्राप्त-अप्रैल 10, 2000]

सारांश

एक समाकल समीकरण का, जिसकी अष्टि सार्वीकृत बेटमैन फलन $K_{2n}^{2m,2l}(t)$ है, प्रतिलोमन प्रस्तुत किया गया है। प्राचलों के विशिष्टीकरण से दीक्षित[2] एवं जोशी[4] द्वारा स्थापित प्रमेय प्राप्त की जा सकती है।

Abstract

Inversion of an integral equation involving generalized Bateman function as its kernel. *By* Bhavana Soni, Department of Mathematics, Government Engineering College, Ujjain (M.P.) and Nitu Trivedi, Vaishnav Academy, Indore (M. P.)

An integeral equation involving generalized Bateman function $K_{2n}^{2m,2l}(t)$ as its kernel has been inverted. The results of Dixit[2] and Joshi[4] follow as special cases.

प्रस्तावना

लाप्लास परिवर्त का प्रयोग करते हुए विडर[6] ने एक समाकल समीकरण का हल प्रस्तुत

किया है जिसकी अष्टि लागेर बहुपद है। विडर द्वारा प्रस्तावित विधि का उपयोग करते हुए अन्य शोधकर्ताओं द्वारा जो शोधपत्र प्रस्तुत किए गए हैं उनमें या तो सार्वीकृत अष्टि का प्रयोग किया गया है या हल को अधिक सार्वीकृत रूप में प्रस्तुत किया गया है।

प्रस्तुत शोधपत्र में सार्वीकृत बेटमैन फलन वाले समाकल समीकरण का प्रतिलोमन दिया गया है। जिस विधि का प्रयोग हुआ है वह विडर[6] की ही है।

श्रीवास्तव[5] ने अपने शोधकार्य में सार्वीकृत कार्य में सार्वीकृत बैटमैन फलन $K_n^{\mu,\nu}(x)$ को निम्नानुसार परिभाषित किया हैं -

$$K_n^{\mu\upsilon}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu}\theta \cos^{\upsilon}\theta \cos[x\tan\theta - n\theta]\, d\theta \tag{1.1}$$

जहाँ n, μ और υ धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं।

यह देखा जा सकता है कि

$$K_n^{o,\upsilon}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\upsilon} K_{\eta}^{\upsilon}(x) \tag{1.2}$$

f(t) के लाप्लास परिवर्त

$$\int_0^{\infty} e^{-Pt} f(t)\, dt = F(P), \qquad \text{Re } P > 0 \tag{1.3}$$

को हम निम्नानुसार सांकेतिक रूप में प्रस्तुत करेंगे

$$f(t) \doteqdot F(P) \tag{1.4}$$

आगे हम एर्डेल्यी[3] के निम्नलिखित ज्ञात परिणामों का प्रयोग करेंगे–

$$f^{n}(t) \doteqdot P^{n}(P) - P^{n-1}f(o) - P^{n-2}f^{1}(o) \ldots \ldots - f^{n-1}(o) \tag{1.5}$$

$$\int_0^t \int_0^t \cdots \cdots \int_0^t f(t)\,(dt)^{n} \doteqdot P^{-n}F(P) \tag{1.6}$$

$$\int_0^t f_1(u)\, f_2(t-u)\, du = F_1(P) \,.\, F_2(P) \tag{1.7}$$

जहाँ $f(t) \doteqdot F_1(P)$ और $f_2(t) \doteqdot F_2(P)$

$$t^{\mu - 1/2}\, M_{K,\mu}(2qt) \doteqdot (2q)^{\mu + 1/2}\, \Gamma(2\mu +)\, \frac{(P-q)^{K-\mu-1/2}}{(P+q)^{K+\mu+1/2}}, \quad \mu > -1/2 \tag{1.8}$$

श्रीवास्तव[3] से हमें निम्नलिखित परिणाम ज्ञात है-

$$K_{2n}^{2m,2}(x) \doteqdot 2(-1)^m P^{2m} (1-P)^{n-l-m-1} (1+P)^{-(n+l+m+1)} \tag{1.9}$$

जहाँ

Re P > 0, (n – 1) धन पूर्णांक एवं (n – 1 – m – 1) > 0

बर्ग [2, P 65, 14.6] के परिणाम का प्रयोग करने पर (1.6) से हमें निम्नलिखित ज्ञात होता है :

$$\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}\, \phi(u)\, du \doteqdot P^{-n} \phi(P) \tag{1.10}$$

परिणाम (1.8) एवं (1.10) से हम निम्नांकित परिणाम सफलतापूर्लक व्युत्पन्न कर सकते हैं।

$$\int_0^t \frac{(t-u)^{2\alpha+2m-1}}{(2\alpha+2m-1)!}\, u^{\beta/2+\gamma/2-l-m-2}\, M^{(2au)}_{\gamma/2-n-\beta/2,\; -\beta/2+\gamma/2-l-m-3/2}$$

$$\doteqdot P^{-2\alpha-2m} (2a)^{\beta/2+\gamma/2-l-m-1}\, \Gamma(\beta+\gamma-2l-2m-2)\, \frac{(P-q)^{-l+m-n-\beta+1}}{(P+q)^{\gamma-n-l-m+1}} \tag{1.11}$$

2. इस खण्ड में एक निम्नांकित प्रमेय स्थापित करेंगे -

प्रमेय : - यदि

(1) α, β, γ, l और m धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं,

(2) $\Gamma(\beta + \gamma - 2l - 2m - 2) > 0$ और

(3) $f^{K}(o) = 0$ यदि $K = 0, 1, 2, \ldots \ldots (2\alpha + \beta + \gamma - 1)$
तो समाकल समीकरण

$$\int_0^x k_{2n}^{2m, 2l} \ [a(x - t)\} \, gt \, dt = f(x) \tag{2.1}$$

का हल

$$g(t) = A \int_0^t \left[\int_0^{t-x} (t - x - u)^{2\alpha + 2m - 1} u^{\beta/2 + \gamma/2 - l - m - 2} \ M_{\gamma/2 - n - \beta/2, \ \beta/2 + \gamma/2 - l - m - 3/2} \, du \right]$$
$$\times D^{2\alpha} (D - a)^{\beta} (D + a)^{\gamma} f(x) \, dx \tag{2.2}$$

जहाँ

$$A = \frac{(-1)^{n - l - 1}}{2^{\beta/2 + \gamma/2 - l - m} a^{\beta/2 + \gamma/2 + l - m} \ \Gamma(\beta + \gamma - 2l - 2m - 2)} \tag{2.3}$$

उपपत्ति : माना कि

$$f(t) \doteq F(P) \text{ तथा } g(t) \doteq G(P)$$

(2.1) (1.9) और (1.7) के प्रकाश में (2.1) का लाप्लास परिवर्त में लेने तथा (2.1) से प्राप्त परिणाम को पुनः व्यवस्थित करने पर

$$G(P) = \frac{(-1)^{n - l - 1}}{(2\,q)^{\beta/2 + \gamma/2 - m} \ \Gamma(\beta + \gamma - 2l - 2m - 2)}$$
$$\times \left[\frac{(2q)^{\beta/2 + \gamma/2 - l - m} \ \Gamma(\beta + \gamma - 2l - 2m - 2)}{P^{2m + 2l}} \right.$$
$$\left. \times \frac{(P - q)^{l + m - n - \beta + 1}}{(P + q)^{\gamma - n - l - m + 1}} \right] P^{2\alpha} (p - q)^{\beta} (P + q)^{\gamma} F(P) \tag{2.4}$$

(2.4) का (1.11) के प्रकाश में लाप्लास प्रतिलोमन करने पर वांछित फल (2.2) की प्राप्ति हो जाती है।

विशिष्ट दशा : (1) यदि $\alpha = \beta = 0$ और $\gamma = \lambda + m$ तो दीक्षित[2] द्वारा स्थापित प्रमेय की प्राप्ति हो जाती है।

(2) पुनः $q = \frac{1}{2}$, $\alpha = \beta = m = 0$ और $\gamma = 3$ का विशिष्टीकरण (1.2) के प्रकाश में करने पर जोशी[4] द्वारा स्थापित प्रमेय की प्राप्ति होती है। इसी प्रकार प्राचलों के विशिष्टीकरण से अन्य शोधकर्ताओं के परिणाम भी ज्ञात किए जा सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

हम डॉ० बी० के० जोशी, प्राध्यापक गणित, शास्त्रीय इंजीनियरी महाविद्यालय, उज्जैन के आभारी हैं जिन्होंने इस शोधपत्र की तैयारी में आवश्यक मार्ग-दर्शन किया।

निर्देश

1. वर्ग, एल. : 1967 Introduction to Operational Calculus, North Holland Pub. Co., Amsterdam.

2. दीक्षित, एल. ए. : विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका; 355-359, 1980, 23(4)

3. एर्डेल्यी, ए. : Tables of Integral Tranasforms, Vol. I, McGraw Hill Pub. (1954).

4. जोशी, बी. के. : Ind. J. Pure & App. Math. 1973, 5(12), 1081-1084.

5. श्रीवास्तव, टी. एन. : Bull. Cal. Math. Soc. 1974, 66, 185-192

6. विडर, डी. वी. : Amer. Math. Monthly : 1963, 70, 291.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 3, July 2000.

मिश्रित धातु यौगिकों का संश्लेषण एवं भौतिक रासायनिक अभिलक्षणन अध्ययन

ए० पी० मिश्र, वी० के० तिवारी, आर० सिंघई तथा एस० गौतम
अकार्बनिक रसायन शोध प्रयोगशाला, रसायन विभाग
डॉ० हरीसिंह गौर विश्वविद्यालय, सागर

[प्राप्त - मार्च 24, 2000]

सारांश

टरथैलिक अम्ल के डाइसोडियम लवण के साथ धातु लवण की अभिक्रिया द्वारा धातु टरथैलेट बनाकर एवं डाइएथिल डाइथायोकार्बामेट के सोडियम लवण के साथ संघनन द्वारा धातु लिगैण्ड संकुलों का निर्माण किया गया। विभिन्न भौतिक तथा रासायनिक विधियों जैसे—अवरक्त स्पेक्ट्रम, पराबैंगनी-दृश्य, आण्विक चालकता तथा चुम्बकीय मापनों द्वारा इन संकर यौगिकों का अध्ययन किया गया। संश्लेषित संकुलों के लिये अष्टफलकीय ज्यामिति सुझाई गई है।

Abstract

Synthesis and physico-chemical characterization of mixed ligand complexes. *By* A. P. Mishra, V. K. Tiwari, R. Singhai and S. Goutam, Inorganic Laboratories, Department of Chemistry, Dr. Hari Singh Gour University, Sagar (M. P.).

The present investigation aims at the synthesis and characterization of metal complexes of Ni(II) sodium diethyl dithiocarbamate terepthalate complexes and Cu(II) sodiumdiethyl dithiocarbomate terephthalate complexes. The present complexes were studies for their I.R. studies, U.V. studies, molar conductance and magnetic measurements. On the basis of above studies a disordered octahedral geometry was proposed for the complexes.

सारणी 1 : यौगिकों के वैश्लेषिक तथा चुम्बकीय आँकड़े

आणविक सूत्र	$Na_2[NiL_2T] . 2H_2O$ $L = (C_2 H_5)_2 NCS_2$ $T = C_8H_4O_4$				$Na_2[Cu_2L_4T . (H_2O)_2]$ $L = (C_2H_5)_2 NCS_2$ $T = C_8H_4O_4$			
अणुभार	641.2004				966.08			
रंग	गहरा हरा				काला			
गलनांक बिन्दु	240				195			
तत्व विश्लेषण	C	H	N	M	C	H	N	M
प्राप्त %	32.52 (33.69)	4.23 (4.36)	4.58 (4.36)	8.75 (9.12)	33.89 (34.78)	4.52 (4.96)	5.84 (5.79)	12.50 (13.12)
μ_{eff} (B. M)	3.08				1.65			
इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रम आँकड़े	ν_1 (cm^{-1}) : 9022 ν_2 (cm^{-1}) 16260 (15625 & 16949) (splitted) ν_3 (cm^{-1}) 23899				ν_1 (cm^{-1}) 14285 (12820–16129)			
संक्रमण	$^3A_{2g}(F) \rightarrow {}^3T_{2g}$ (F) $^2A_{2g}(F) \rightarrow {}^3T_{1g}$ (F) $^3A_{2g}(F) \rightarrow {}^3T_{1g}$ (P)				$^2Eg \rightarrow {}^2T_{2g}$			
लिगैण्ड क्षेत्र परिमाप	100 Dq (cm^{-1}) : 9033 B (cm^1) : 747 β : 0.69 β° : 30 L. F. S. E. (KJ/mole) : 129.97				10 Dq (cm^{-1}) = 14,285 L. F. S. E. (KJ/mole) 102.76			

टरथैलेट की तापप्रतिरोधी और बहुलीकृत प्रकृति के कारण इसका अत्यधिक औद्योगिक महत्व है। औद्योगिक और जीववैज्ञानिक महत्व के अतिरिक्त, मिश्रित लिगैण्ड संकुलों का सैद्धांतिक तथा रासायनिक उपयोग भी है[1-3]। प्रस्तुत शोध का उद्देश्य Ni(II) सोडियम डाइएथिल डाइथायोकार्बामेट टरथैलेट तथा Cu(II) डाइएथिल डाइथायोकार्बमिट टरथैलेट संकुलों का संश्लेषण तथा उनका अभिलक्षणन करना है।

प्रयोगात्मक

निकेल तथा कॉपर के धातु टरथैलेट तथा लिगैण्ड की अभिक्रिया द्वारा धातु संकुल बनाये गये। धातु टरथैलेट संकुल के निर्माण के लिये निकेल सल्फेट, कॉपर सल्फेट, टरथैलिक अम्ल तथा सोडियम बाइकार्बोनेट का प्रयोग किया गया एवं सोडियम डाइएथिल डाइथायोकार्बामेट को लिगैण्ड के रूप में प्रयोग किया गया है। संकुलों के संश्लेषण के लिये उपयोग में लाये गये अभिकर्मक वैश्लेषिक कोटि के थे।

धातु टरथैलेट का संश्लेषण

धाति टरथैलेट का निर्माण, टरथैलेट अम्ल तथा धातु लवणों के जलीय विलयन की अभिक्रिया द्वारा किया गया। निकेल सल्फेट/कॉपर सल्फेट तथा सोडियम टरथैलेट के जलीय विलयन को चुम्बकीय विलोडक पर 1–2 घंटे के लिये 60°C पर गरम किया। प्राप्त अवक्षेप को छानकर आसुत जल से दो-तीन बार साफ कर 115°C पर विद्युत ओवेन में सुखाया गया।

धातु यौगिकों का निर्माण

निकेल टरथैलेट/कॉपर टरथैलेट (0.01 मोल) के जलीय मेथेनालिक विलयन के साथ सोडियम लवण के डाइएथिल डाइथायोकार्बमेट के जलीय मेथेनालिक विलयन को 1 : 2 के अनुपात में मिलाया गया। इस दौरान अभिक्रिया विलयन का पी-एच 7–8 के बीच पाया गया, तत्पश्चात् अभिक्रिया मिश्रण को ठण्डा करने पर प्राप्त संकर यौगिक को छानकर मेथेनाल से दो तीन बार साफ किया है। संकर यौगिक को पहले जलशोषक (डेसीकेटर) में निर्जल कैल्सियम क्लोराइड पर तथा बाद में विद्युत ओवेन में 60°C पर सुखाया।

अवरक्त अवशोषण स्पेक्ट्रम अध्ययन

अवरक्त अवशोषण स्पेक्ट्रम CDRI लखनऊ द्वारा पार्किन एल्मर स्पेक्ट्रोफोटोमीटर पर अभि-लेखित किया गया। इन संकुलों के लिये प्रस्तावित आण्विक सूत्र तथा प्राप्त वैश्लेषिक आँकड़ों के मध्य अच्छा सम्बन्ध पाया गया है।

लिगैण्ड में $V_{C=S}$ समूह का बैण्ड 1000 cm^{-1} पर प्रदर्शित होता है जो संकुल में रेड शिफ्ट के

साथ 930±10cm^{-1} पर पहुँचता है। लिगैण्ड में V_{C-N} बैण्ड 1450–1500 cm^{-1} की आवृत्ति को अवशोषित करता है। किलेटीकरण के पश्चात् यह बैण्ड उच्च आवृत्ति क्षेत्र 1530 ± 10 cm^{-1} पर पहुँचता है। टरथैलेट ऋणायन के अभिलाक्षणिक कार्बोक्सिलिक अवशोषण बैण्ड का ऋणात्मक विस्थापन इस समूह की किलेटीकरण में भागीदारी दर्शाता है[4-6]। संकर यौगिकों में 2950–3400cm^{-1} पर एक स्पष्ट बैण्ड की उपस्थिति का कारण जलीय अणु अथवा हाइड्रोजन बंधन हो सकता है[4-6] कॉपर Cu (II) – संकुल में एक अलिगैण्ड बैण्ड की उपस्थिति सहसंयोजित जल के राकिंग मोड को निर्दिष्ट करती है। धातु संकुल यौगिकों में दुर्बल तीव्रता के कुछ नये बंध 400 ± 10 cm^{-1} क्रमशः V_{M-0} तथा V_{M-S} को दर्शाते[5-7] हैं।

सारणी 2

धातु यौगिकों के अवरक्त अवशोषण बैण्ड

यौगिक	Ni(II) संकर यौगिक (cm^{-1})	Cu(II) संकर यौगिक (cm^{-1})
एरोमैटिक रिंग कम्पन	1590(m), 1450(m) 1010(ms) 720(s)	1580, 1450(m) 1000(m–s) 730(s)
C = N	~1530(br) (OH bonded)	1540(br) (OH bonded)
$C-CH_3$	1360	1350
C = S	940(S)	930(S)
N–C–S	1190	1190
COO^- Carboxylate	1630 (mbr) 1280 (ms)	1630 (mbr) 1290 (m)
$-H_2O$	~3400(br)	~2950(br) –OH bonded
N–O	400 (mbr)	410 (mw)
M–S	280(W)	290(W)

पराबैंगनी स्पेक्ट्रम अध्ययन

Ni(II) संकुल के इलेक्ट्रॉनिक स्पेक्ट्रम में केवल दो बैण्ड प्राप्त होते हैं। प्रथम बैण्ड $^3A_{2g} - {}^3T_{2g}$ संक्रण के कारण होता है, जो स्पेक्ट्रम रेन्ज में प्रदर्शित नहीं होता अतः गणना द्वारा 9033 cm^{-1} पर प्राप्त किया गया। दूसरा बैण्ड 15625 cm^{-1} और 16949 cm^{-1} पर विभक्त होता है जो चक्रण आर्बिट युग्मन के कारण हो सकता है[8-10]। तीसरा बैण्ड 23809 cm^{-1} पर प्रदर्शित होता है जो $^3A_{2g}(F) - {}^3T_{1g}(P)$ संक्रमण के अनुरूप होता है। इसके अतिरिक्त लिगैण्ड क्षेत्र परिमाप मान भी परिकलित किये गये जो निम्न हैं -

$10Dq$, 9033cm^{-1}; β 747 cm^{-1}; β 60.69; β^o; 30.0, **LFSE 129129.97KJ/mol.** एवं चुम्बकीय आघूर्ण का मान μ_{eff} = 3.08 B . M ।

उपर्युक्त परिमापों का आधार पर Ni(II) संकुल के लिए विकृत अष्टफलकीय ज्यामिति सुझाई गई है[8-11]। एक चौड़ा असममिति बैण्ड जो 12820 cm^{-1} से 19129 cm^{-1} पर पाया जाता है d-d संक्रमण को निर्दिष्ट करता है।

Cu(II) संकुल 23895 cm^{-1} पर प्रबल अवशोषण बैण्ड दर्शाता है जो आवेश स्थानान्तरण बैण्ड है। यह संकुल एक चौड़ा बैण्ड प्रदर्शित करता है जो 12820 cm^{-1} तथा 16129 cm^{-1} पर विभक्त होता है। $^2Eg - {}^2T_{2g}$ संक्रमण के अनुरूप तथा d-d संक्रमण को निर्दिष्ट करता है। इन बैण्डों की उपस्थिति तथा अन्य आँकड़ों की सहायता से इस संकर यौगिक की विकृत अष्टफलकीय ज्यामिति प्रस्तावित की गई है। प्रेक्षित चुम्बकीय आघूर्ण 1.65 B. M. है जो 'Spin only' मान से कुछ कम है जिसका कारण Cu-Cu की अन्योन्य क्रिया हो सकती है तथा यह Cu (II) संकुल की डाइमेरिक प्रकृति के पक्ष में है।

निर्देश

1. मिश्रा, ए. पी. : पी. एच. डी. थीसिस, यूनिवर्सिटी ऑफ इलाहाबाद (1984).

2. बर्गर, ए. : मेडिसिनल केमिस्ट्री, इण्टरसाइन्स न्यूयार्क (1970).

3. डे. ए. के. : जर्नल इण्डिन केमिकल सोसायटी, 1986, 257.

4. शर्मा, सी. एल., डे. टी. के. तथा सिंह, ए. के. : इण्डियन जर्नल केमिस्ट्री 1979, 18A, 183.

5. नाकामेटो, के., इन्फारेड स्पेक्ट्रा ऑफ इनार्गेनिक एण्ड कोआर्डिनेशन कम्पाउन्ड्स, चतुर्थ संस्करण, विले इण्टर लाइन्स, न्यूयार्क (1986).

6. सिल्वरस्टीन, आर. एन. बैसलर, जी. सी. तथा मारिल, टी. : स्पेक्ट्रोमीट्रिक आइडेन्टिफिकेशन ऑफ आर्गनिक कम्पाउन्ड्स, चतुर्थ संस्करण विले एण्ड सन्स यू. एस. ए. 95 (1981).

7. श्यामल, ए. : इण्डियन जर्नल केमिस्ट्री, 1991, 30A, 390.

8. भत्ता, आर. एल. तथा श्यामल, ए. : एलीमेन्टस ऑफ मैग्नेटोकेमिस्ट्री, द्वितीय संस्करण, ईस्ट वेस्ट, न्यू दिल्ली (1993), 82, 123, 150, 157.

9. फिगिस, बी. एन. : कमप्रिहेन्सिव इनार्गेनिक केमिस्ट्री, संस्करण जी विलकेन्सन पर्गोमेन प्रेस (यू. के.), 2 (1987).

10. शिवर, डी. एफ., आटकिन्सन, पी. डब्ल्यू. तथा लांगफोर्ड, सी. एच. : इनार्गेनिक केमिस्ट्री, यू. के. (1990).

11. शुक्ला, पी. आर., अहमद, एन. तथा अवस्थी, बी. बी. : जनरल ऑफ इण्डियन केमिकल सोसायटी, 1990, 67, 418.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 3, July 2000.

हाइपरज्यामितीय फलन के लिए एक रूपान्तरण सूत्र

यशोवर्धन व्यास तथा ए० के० राठी

गणित विभाग, डूँगर महाविद्यालय, बीकानेर (राजस्थान)

[प्राप्त – मार्च 15, 2000]

सारांश

मनिहार तथा बैनर्जी[1] द्वारा हाइपरज्यामितीय फलन के लिए प्राप्त सांत रूपान्तरण सूत्र का हाल ही में श्रीवास्तव[2] ने व्यापकीकरण करके एक असांत रूपान्तरण सूत्र दिया है। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य उनके सूत्र को सरल विधि से हल करना है।

Abstract

A transformation formula for Hypergeometric Function. *By* Yashoverdhan Vyas and A. K. Rathie, Department of Mathematics, Dungar College, Bikaner (Rajasthan).

Recently, Srivastava,[2] generalized the terminating transformation formula for hypergeometric function obtained by Manihar and Banerji[1] and gave a non-terminating transformation formula. The aim of this paper is to derive their result by a very simple method.

1. मुख्य परिणाम

इस प्रपत्र में निम्नलिखित रूपान्तरण सूत्र[2] को हल करने की सरल विधि दर्शायी जायेगी।

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-a, -a+1/2 \\ b+1/2\end{matrix}\middle|\, 1\right) = \frac{2^a\,\Gamma(a+1/2)\,\Gamma(b+n+1/2)}{\Gamma(n+1/2)\,\Gamma(a+b+1/2)}\ {}_2F_1\left(\begin{matrix}2a, b \\ a+b/2+1/2\end{matrix}\middle|\, 1/2\right) $$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix}-a/2, -a/2+1/2 \\ b/2+1/2\end{matrix}\middle|\, 1\right) {}_2F_1\left(\begin{matrix}-2n, b \\ 2b\end{matrix}\middle|\, 1/2\right) \qquad (1.1) $$

2. उपपत्ति

यदि (1.1) के दक्षिण-पक्ष को I द्वारा सूचित करें तथा रैनविले[3] के निम्नलिखित सूत्र

$$ {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1,\ b \\ c \end{matrix} \middle| \ 1 \right) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)} \tag{2.1} $$

जहाँ Re (c – a – b) > 0 है।

$$ {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 2a,\ 2b \\ a+b+1/2 \end{matrix} \middle| \ 1/2 \right) = \frac{\Gamma(1/2)\,\Gamma(a+b+1/2)}{\Gamma(a+1/2)\,\Gamma(b+1/2)} \tag{2.2} $$

एवं

$$ {}_2F_1 \left(\begin{matrix} -2k,\ a \\ 2a \end{matrix} \middle| \ 2 \right) = \frac{(1/2)_k}{(a+1/2)_k} \tag{2.3} $$

का प्रयोग करके सरल करें तो हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है :

$$ I = \frac{\Gamma(b+1/2)\,\Gamma(b+2a)}{\Gamma(b+a)\,\Gamma(b+a+1/2)} $$

जो कि **(1.1)** का वाम पक्ष ही है।

3. विशेष दशा

मुख्य परिणाम (1.1) में $a = n \ (n \in N_0)$ लेने पर हमें मनिहार तथा बैनर्जी[1] द्वारा प्राप्त रूपान्तरण सूत्र प्राप्त होता है।

निर्देश

1. मनिहार, जे. तथा बैनर्जी, पी. के., गणित सन्देश, 1991, 5, 37–3.
2. श्रीवास्तव, एच. एम., गणित सन्देश, 1992, 6, 67–70.
3. रैनविले, ई. डी., Special Functions, चेल्सिया पब्लि. कं. न्यूयार्क, 1960.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 3, July 2000.

राजस्थान में अरावली क्षेत्र के आदिवासियों के मनोरंजन के साधन : एक नृवनस्पतिशास्त्रीय अध्ययन

सतीश कुमार शर्मा
क्षेत्रीय वन अधिकारी (नागरगढ़ जैविक उद्यान)
2. सुरेश नगर, दुर्गापुरा, जयपुर -302018 (राज.)

[प्राप्त – अप्रैल 7, 2000]

सारांश

प्रस्तुत पत्र में अरावली के आदिवासियों के कुछ अल्पज्ञात एवं अज्ञात मनोरंजन के साधनों का विवरण दिया गया है। अध्ययन के दौरान 20 पौधों के विभिन्न भागों का 17 मनोरंजन साधनों में उपयोग पाया गया।

Abstract

Entertainment means of the tribals of Aravali range in Rajasthan : An ethnobotanical study. *By* Satish Kumar Sharma, Range Forest Officer (Nahargarh Biological Park), 2, Suresh Nagar, Durgapura, Jaipur (Raj.)

In present paper, few lesser known as well as unknown means of entertainment of the tribals of Aravallis are highlighted. As many as 20 plants and their different parts were found to be useful in 17 entertainment means of the tribals.

आदिवासियों के संगीत से सम्बन्धित उपकरणों तथा सम्बन्धित पहलुओं का वैज्ञानिक अध्ययन एथनोम्यूजिकोलोजी (Ethnomusicology) नामक विज्ञान के अन्तर्गत किया जाता है। अरावली के आदिवासियों के मनोरंजन पहलुओं पर काले[1], जोशी[2], माहेश्वरी[3], दोशी एवं व्यास[4], खण्डेलवाल[5], शर्मा[6] आदि ने विशद वैज्ञानिक विवेचन प्रस्तुत किया है। जोशी[2] ने पपीया, मगरा का पपीया, घुंघरू, डांडिया, टापरा, ढोलक, ढोल, थालीसन, पावरी, बांसुरी, चिकारा, रावणहत्था, तंबूरा, साग, शंख, गौरयू, डूचका, ढाक, कवर, तारपी, पूंगी, गांगली आदि वाद्ययंत्रों

का विवरण देते हुए कई खिलौनों एवं खेलों का वैज्ञानिक विवेचन प्रस्तुत किया है। खण्डेलवाल[5] ने राजस्थान के आदिवासियों के ''वानस्पतिक खिलौनों'' की अच्छी जानकारी पेश की है। उपर्युक्त वैज्ञानिकों के कार्य से आदिवासियों के मनोरंजन के विभिन्न साधनों जैसे शिकार, खेल, खिलौने, नृत्य, आभूषण, नशे जैसी प्रवृत्तियों की अच्छी जानकारी मिलती है। इन अध्ययनों के उपरान्त भी मनोरंजन के अनेक अन्य साधनों, उपकरणों एवं विधाओं का कोई लेखा-जोखा नहीं मिलता या बहुत कम जानकारी ही उपलब्ध है। अरावली क्षेत्र के आदिवासियों जैसे भील, भील मीणा, कथोड़ी, गरासिया आदि के मनोरंजन के उपकरणों हेतु 1986 से 1998 तक किये गये अध्ययन के निष्कर्ष यहाँ प्रस्तुत हैं।

प्रयोगात्मक

कार्यविधि

आदिवासी वनस्पति एवं प्राणीजन्य गहनों, खिलौनों, वाद्ययन्त्रों से अपना मनोरंजन करते हैं। आदिवासियों के मनोरंजन के साधनों की जानकारी लेने के लिए आदिवासी-बहुल क्षेत्रों में निवासियों के घरों पर जाकर जानकारी एकत्र की गई। आदिवासी हाटों (स्थानीय बाजार) एवं मेलों में प्रेक्षण किये। वन विभाग की ''विभागीय कार्य इकाई'' में कूपों में कटाई कार्य पर लगे आदिवासियों के डेरों/झोपड़ों में खेलते बच्चों से तथ्य जुटाये गये। गवरी तथा गैर नृत्यों के अवसरों पर भी तथ्य संग्रह किये गये।

परिणाम तथा विवेचना

मनोरंजन के साधन

काले, जोशी, माहेश्वरी, दोशी एवं व्यास, खण्डेलवाल द्वारा बताये गये मनोरंजन के साधनों के अलावा अरावली क्षेत्र के आदिवासी अन्य कई मनोरंजन के साधनों का उपयोग भी करते हैं जिनकी संक्षिप्त जानकारी निम्नवत् है :-

1. **फटूकड़ी** : स्थानीय भाषा में इसे 'फडूकरी' एवं ''फटकिया'' भी कहा जाता है। यह दो तरह की होती है। एक ''बन्दूक'' का कार्य करने वाली एवं दूसरी रंग फेंकने वाली। बन्दूक वाली फटूकड़ी माल (*Celastrus paniculata*) के फल एवं बाँस (*Dendrocalamus strictus*) के पोले तने से बनाई जाती है। इसे बनाने के लिये माल के फल के व्यास के बराबर गुहा (Cavity) वाले 2 फुट लम्बे बाँस के टुकड़े को खोखला किया जाता है। अब एक तरफ से माल के ताजा तोड़े फल का नुकीला छोर खोखले बाँस पर रख कर इसके चौड़े सिरे पर बाँस की डंडी से इसे जोर लगाकर खिसका कर पोले बाँस के बीच तक ले जाते हैं। अब माल का दूसरा फल पहले की तरफ लगा कर उसे भी भी अन्दर ठेलते हैं। दोनों फलों के बीच वायु संपीडित होने से पहले डाला फल ''फटाक'' की आवाज करता हुआ गोली की तरह आगे निकल जायेगा। यदि माल का फल नहीं मिलता है तो पुवाड (*Cassia tora*) के पत्तों को थोड़ा कूट कर उनकी गोली बनाकर काम में लाते

हैं (चित्र-1)।

रंग फेंकने वाली फटूकड़ी बनाने के लिए बाँस को इस तरह खोखला किया जाता है कि एक छोर पर गाँठ पर पर्दा टूट न जाये। इस पर्दे के केन्द्र में एक बारीक सूराख किया जाता है। दूसरी तरफ से बाँस की एक पतली डंडी पर कपड़ा लपेट कर अन्दर डाला जाता है। कपड़ा लपेटा "पिस्टन" अन्दर खींचने पर इसमें रंगीन पानी भरा जाता है तथा पिस्टन दबाकर पिचकारी का रंग दूसरों पर उड़ेला जाता है (चित्र-2)।

2. भंवरा (लट्टू) : यह आयपोमिया सिपेरिया (*Ipomoea sepiaria*) के कच्चे फलों से बनाया जाता है। फल को तोड़ उस पर लगे स्थाई बाह्य दल को हटा दिया जाता है तथा चौड़े सिरे की तरफ से बबूल (*acacia nilotica*) का कांटा अन्दर आर-पार इस तरह डालते हैं कि काँटा फल की धुरी का कार्य करे। अब इसे लट्टू की तरह घुमाते हैं (चित्र-3)।

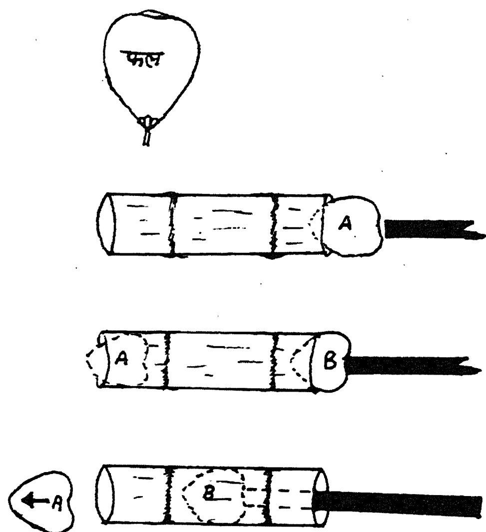
3. कडाया का चक्का : ओगणा क्षेत्र के मनोरंजन का यह साधन देखा गया है। कडाया (*sterculia urens*) वृक्ष की लगभग 6 इन्च मोटी शाखा को काट कर आरी से छः-छः इन्च मोटाई के गोले (slice) काटे जाते हैं। प्रत्येक गोले के अन्दर के काष्ठीय भाग को सावधानी से इस तरह से हटाया जाता है कि बाहरी छाल का घेरा सुरक्षित बचा रहे। छाल के घेरे में एक पतली लकड़ी डालकर घेरे को भागते हुये आगे-आगे लुढ़काया जाता है।

4. रतनजोत के फलों की गाड़ी : रतनजोत (*Jatropha curcas*) के एक कच्चे फल से बाँस की 1 मी. लम्बी डंडी का एक छोर घुसाया जाता है। रतनजोत के इस फल से बाँस की एक बहुत पतली 15 सेमी लम्बी डंडी आर-पार बड़ी डंडी के समकोण पर निकाली जाती है। इस छोटी डंडी के दोनों छोरों पर रतनजोत के दो कच्चे फल दबा कर फँसा दिये जाते हैं जो गाड़ी को चलाने पर पहियों का काम करते हैं (चित्र-4)।

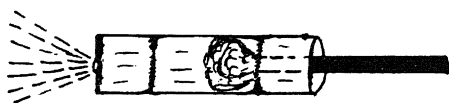
5. बाजणिया : माउन्ट आबू अभयारण्य में उगने वाले बाजणिया (*crotalaria spectabilis*) नामक पौधे के कई पके, सूखे फलों को धागे में बाँधकर "वानस्पतिक पायजेब" बनाई जाती है, जिसे "बाजणिया" कहा जाता है। लड़कियाँ इन्हें पैरों में बाँधती हैं। चलने पर इनसे घुंघरू की तरह आवाज निकलती है (चित्र-5)।

6. गलफूल : गलफूल (*Zinnia picta*) नामक पौधे के फूलों को लड़कियाँ कानों में गहनों की तरह पहनती हैं या कानों के ऊपर तोड़कर रखती हैं। लड़के भी इन्हें कानों पर रखते हैं। वर्षा ऋतु में यह पौधा झाड़ोल, ओगणा, फुलवारी, कोटड़ा, देवला, पानखा, कमलनाथ आदि क्षेत्रों में प्रचुर मात्रा में उगता है।

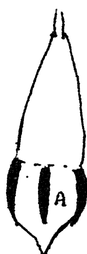
7. बीटी : बाँस के तने की छीलन, खजूर (*Phoenix sylvestris*) के पर्णक (leaflet) तथा मोर-पंखों से खिलौना अंगूठी (बीटी) बनाकर अँगुलियों में पहनने का रिवाज है। मोर पंख के गहने जिन्हें "बेडे" या "पाटिया" कहा जाता है, दीवाली पर पशुओं के गले में भी बाँधे जाते हैं।

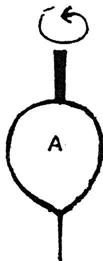


चित्र-1

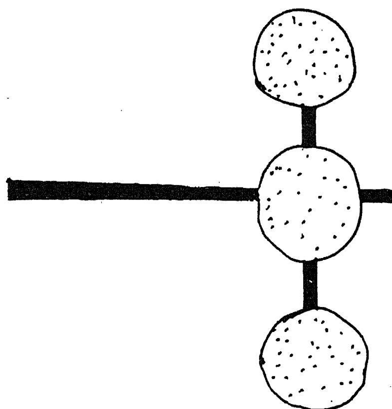


चित्र-2

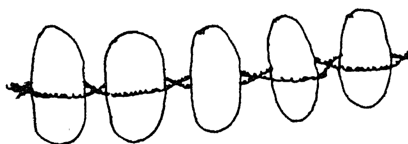




चित्र-3



चित्र-4



चित्र-5

8. माला : काहिया (*Coix lacryma-jobi*), खजूर (*Phoenix sylvestris*), मिरबिलिस जलापा (*Mirabils jalapa*), कटकरंज (*Caesalpinia bonduc*) के बीजों की माला बना कर दक्षिण राजस्थान के आदिवासी धारण करते हैं। जयपुर क्षेत्र के मीणा तथा अन्य जाति के लोग बच्चा जन्म लेने पर भीगे गेहूँ के दानों की माला बना, उसे सुखा कर बच्चा-जच्चा को पहनाते हैं। दक्षिण राजस्थान के आदिवासी पलाश (*Butea monosperma*) के फूलों की माला पहनते हैं। कटकरंज के बीजों की माला कुम्हार मटके बनाने में करते हैं। माला के गोल-गोल मनकों को हाथ से घुमा-घुमाकर अच्छी 'फिनिशिंग' की जाती है।

9. सरचूंदिया : सालर (*Boswellia serrata*), गोदल (*Iannea cromandelica*) तथा रतनजोत (*Jatropha curcas*) की हल्की लकड़ी से झूला झूलने का उपकरण सरचूंदिया बनाया जाता है। इसे बनाने के लिए छः इन्च से ज्यादा मोटाई की लकड़ी के दो टुकड़े काम में लाये जाते हैं। एक टुकड़ा ऊर्ध्वतः इस तरह मजबूती से जमीन में गाड़ा जाता है कि जमीन से बाहर लगभग उसका 60 सेमी. भाग रहे। इसका शीर्ष छील कर नुकीला बना लिया जाता है। दूसरी, 1.5 मी लम्बी लकड़ी के मध्य में एक छोटा गड्ढा बनाकर इसे खड़ी लकड़ी के शीर्ष पर क्षैतिज अवस्था में रख दिया जाता है। क्षैतिज लकड़ी पर आमने-सामने दो बच्चे बैठकर इसे गोल-गोल घुमाकर झूलते हैं। कई बार तीसरा बच्चा ऊर्ध्व डंडे के पास खड़ा होकर लकड़ी को घुमाने में मदद करता है।

10. छत्ता : यह सरचूंदिया का बिल्कुल छोटा रूप होता है। इस पर बच्चे बैठते नहीं हैं बल्कि पास खड़े होकर हाथ से घुमा-घुमा कर खेलते हैं (चित्र-6)।

11. अंगारे के पटाखे तथा फुलझड़ी : गोबर के कंडों से बने अंगारों को पानी में फेंका जाता है। पानी में फेंकने से निकली विशेष आवाज का आदिवासी खूब आनंद लेते हैं। कई बार अंगारे को एक समतल पत्थर पर रख देते हैं तथा ऊपर से दूसरा चपटा पत्थर पटकते हैं, जिससे चिनगारियाँ निकलती हैं। यह आदिवासियों की फुलझड़ी का कार्य करता है।

12. बम : हिंगाटे (*Balanites aegyptiaca*) के फल की गुठली में विस्फोटक भर कर देशी बम बनाये जाते हैं। ये बम मत्स्य आखेट द्वारा मनोरंजन में काम लिये जाते हैं।

13. छापा : यह गोदने (Tattoo) का सबसे सरल रूप है। गोदने में जहाँ दर्द होता है एवं स्थाई चिन्ह त्वचा में उभरता है वहाँ ''छापा'' में बिना दर्द अस्थाई चिन्ह उभरता है। छापा उभारने के लिये आदिवासी ''कागला का पत्ता'' (*Cheilanthes farinosa*) नामक फर्न की पत्ती को इस तरह शरीर पर रखते हैं कि पत्ती की निचली सतह त्वचा को छूती रहे। अब हथेली से दबाव डालकर पत्ती की आकृति त्वचा पर छाप लेते हैं।।

14. गर्मबीज : इमली (*Tamarindus indica*) एवं कमल (*Nelumbo nucifera*) के बीजों को पत्थर पर रगड़ कर गर्म बीज को अचानक दूसरों को छुआकर तंग करने का खेल खेला जाता है।

15. आम्बा बाजना : यह एक तरह की सीटी देने वाला उपकरण है जो वर्षा ऋतु में उगते



चित्र 6 : छत्ता



चित्र 7 : आम्बा बाजना

हुये आमों (*Mangifera indica*) के नवांकुरों से बनाया जाता है। हाल ही में उगे आम के पौधे को उखाड़कर उसकी जड़ को तोड़ दिया जाता है। गुठली के सख्त आवरण को सावधानी से हटा कर कोमल बीजपत्र एवं पत्तों को रखा जाता है। गुठली में जहाँ से प्ररोह निकलता है, उससे विपरीत दिशा में एक बीजपत्र को खुरदरे पत्थर से रगड़कर छोर पर पैना कर मुँह में लेकर फूँक मारी जाती हैं, ऐसा करने से सीटी की सुरीली आवाज निकलती है (चित्र-7)।

16. पत्तों की गुड़िया : ग्वाले जंगल में ढाक (*Butea monosperma*) के पत्तियों की गुड़िया बनाकर उनको खिरनी (*Wrightia tinctoria*) तथा खिरना (*W. tomentosa*) के फूलों की माला पहना कर सजाते हैं और सिर पर उपलब्ध किसी लाल या अन्य रंग के फूल सजाते हैं (चित्र-8)।



चित्र-8 : पत्तों की गुड़िया

17. लाल तिलक : पूर्वी राजस्थान में कई जगह बच्चे, लड़कियाँ एवं महिलायें खेल-खेल में *Amebia hispidissima* नामक पौधें की जड़ों से माथे पर लाल तिलक लगाती हैं।

निष्कर्ष

आदिवासियों के मनोरंजन से जुड़े कई नये अज्ञात पहलुओं पर यहाँ प्रकाश डाला गया है तथा 20 वनस्पतियों के मनोरंजन हेतु उपयोग की चर्चा की गई। इस अध्ययन से यह स्पष्ट होता है कि आदिवासी एवं वनवासी लोग स्थानीय रूप से उपलब्ध वनस्पति एवं प्राणिज उत्पादों का अपने मनोरंजन हेतु उपयोग कर प्रकृति से अपनी निकटता का सराहनीय उदाहरण पेश करते हैं। इनके मनोरंजन के साधन सस्ते, सरल, स्थानीय तकनीक एवं सामग्री से बने, प्रदूषणविहीन और सुरक्षित होते हैं। आदिवासियों के कई खिलौने एवं मनोरंजन के साधन तो मौसमी प्रकृति के होते हैं। खिलौने विशेष हेतु जब कच्चा माल जैसे, फूल-बीज प्रकृति में सुलभ होते हैं, उसी समय उनको बनाया जाता है। ''वानस्पतिक खिलौनों'' एवं ''वानस्पतिक मनोरंजन के साधनों'' का उपयोग आदिवासी समाज में बहुत व्यापक है।

आदिवासियों के वाद्य यन्त्र बनाने में कई पौधे भी दुर्लभ होते जा रहे हैं। जैसे सारंगी निर्माण में *Capparis grandis* तथा तम्बूरा बनाने हेतु उपयोगी *Sterculia colorata* बहुत दुर्लभ हो चुके हैं।

इन पौधें का संरक्षण भी जरूरी है।

वनवासियों एवं आदिवासियों का इस तरह विकास किया जाना चाहिए कि उनकी प्रकृति से निकटता एवं निरन्तरता बनी रहे ताकि वे प्रकृति संरक्षण में योगदान दे सकें।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक श्री यू. एम. सहाय, श्री ए. सी. चौबे, श्री ए. एस. चम्पावत, श्री भरत तैमनी, श्री वाई. के. दक, श्री डी. एन. पाण्डे, श्री कालूलाल व उदयपुर संभाग की ढाला, दौलरिया, सालुखेड़ा, मालपुर, दमाणा-तालाब, जाड़ापीपला, ओड़ा, नला, गुजरी की नाल, किरट आदि सुरक्षा समितियों का बहुत आभारी है, जिन्होंने अध्ययन में कई तरह से सहयोग किया।

लेखक प्रो. वाई. डी. त्यागी एवं डॉ. एस. एस. कटेवा का आभारी है, जिन्होंने जीनिया पिकटा को पहचानने में मदद प्रदान की।

निर्देश

1. काले, सुश्री मालिनी : भील संगीत और विवेचन, हिमांशु पब्लिकेशन्स, उदयपुर (1987)
2. जोशी, पी. : एथनोबॉटनी ऑफ द प्रिमिटिव ट्राईब्स इन राजस्थान, प्रिन्टवेल जयपुर (1995)
3. दोशी, एस. एल. तथा एन. एन. व्यास : ट्राईबल राजस्थान : सनशाईन ऑन द अरावली, हिमांशु पब्लिकेशन्स, उदयपुर (1992)
4. महेश्वरी, जे. के. : ''इण्टरडिसिप्लनरी अप्रोच इन एथनोबॉटनी'', ''ए मैनुअल ऑफ एथनोबॉटनी'' में – संपादक एस. के. जैन (1993)
5. खण्डेवाल, एस. आर. : ''एथनोबॉटनी ऑफ द भील ट्राइब इन राजस्थान'', पी-एच. डी., थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर
6. शर्मा, सतीश कुमार : लोक प्राणि ज्ञान, हिमांशु पब्लिकेशन्स, जयपुर, (1998)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 3, July 2000.

फूरियर श्रेणी तथा इसकी संयुग्मी श्रेणी की एकसमान (N, p, q) संकलनीयता

वी. एन. त्रिपाठी तथा एस. के. त्रिपाठी
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त - फरवरी 22, 2000]

सारांश

त्रिपाठी तथा सिंह ने सामान्य दशा के अन्तर्गत फूरियर श्रेणी तथा इसकी संयुग्मी श्रेणी की एकसमान नार्लुण्डं संकलनीयता का अध्ययन किया है। यहाँ इस प्रपत्र में हमारा उद्देश्य कुछ भिन्न दशा के अन्तर्गत फूरियर श्रेणी तथा इसकी संयुग्मी श्रेणी की एक समान (N, p, q) संकलनीयता की विवेचना करना है।

Abstract

On uniform (N, p, q) summability of Fourier series and its conjugate series. *By* V. N. Tripathi and S. K. Tripathi, Department of Mathematics, B. H. U., Varanasi, (U.P.)

Tripathi and Singh (1980) have studies uniform Nörlund summability of Fourier series and its conjugate series under general condition. Here in the present paper, our object is to discuss uniform (N, p,q) summability of Fourier series and its conjuate series under slightly different condition.

1. माना कि $\Sigma\ U_n(x)$ एक अनन्त श्रेणी है जिसमें $\{S_n(x)\}$ अपने nवें आंशिक योगफलों का अनुक्रम है। माना कि $\{P_n\}$ तथा $\{q_n\}$ दो अनृण अनुक्रम हैं जिनके साथ

$$\{P_n\} = \sum_{k=0}^{n} P_k \neq 0,\ Q_n = \sum_{k=0}^{n} q_k,\ R_n = \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}\, q_k \neq 0 \qquad (1.1)$$

सेट E में बिन्दु x पर अनुक्रम $S_n(x)$ का nवाँ (N, p, q) माध्य $t_n^{p,q}$ (X) अनुक्रमशः रूपान्तर द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$$t_n^{p,q}(X) = 1/R_n \sum_{k=0}^{n} P_{n-k}\, q_k\, S_k(X) \qquad (1.2)$$

यदि $t_n^{p,q}(x) \to s(x)$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$, तब श्रेणी $\sum U_n(X)$ या इसके आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{S_n(x)\}$ सेट E में बिन्दु x पर योगफल $S(x)$ के लिए संकलनीय (N, p, q) कहा जाता है।
यदि

$$t_n^{p,q}(X) - S(X) = 0\ (1) \qquad (1.3)$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$ सेट E में एकसमान रूप से तो हम कहते हैं कि श्रेणी $\sum U_n(x)$ E में एक-समान रूप से योगफल S के लिए संकलनीय (N, p, q) हैं।

उस दशा में जब $q_n = 1, \forall$ n (N, p, q) संकलनीयता समानीत होती है।

$p_n = 1/n + 1$, $q_n = 1$ के लिए संकलनीयता $(N, p\,n)$ में, और $(N, p\,n)$ संकलनीयता $(N, 1/n + 1)$ में समानीत होती है जो हार्मोनिक संकलनीयता कही जाती है।

2. माना कि $f(t)$ एक 2π आवर्ती तथा t का लेबेस्क संकलनीय फलन है अन्तराल $(-\pi, \pi)$ में। तब संकलन $f(t)$ की फूरियर श्रेणी को निम्न द्वारा दिया जाता है–

$$f(t) \sim 1/2\, a_o + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nt + b_n \sin nt\right) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \qquad (2.1)$$

फूरियर श्रेणी (2.1) की संयुग्मी श्रेणी है–

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos nt - a_n \sin nt) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(t) \qquad (2.2)$$

बिन्दु $t = x$ पर हम लिखते हैं-

$$\varphi(t) = f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)$$

$$\Psi(t) = f(x+t) - f(x-t)$$

$$\phi(t) = \int_0^t |\varphi(u)|\, du$$

$$\Psi(t) = \int_0^t |\Psi(u)|\, du$$

$$N_n^{p,q}(t) = 1/2\pi R_n \sum_{k=0}^{n} P_{n-k} q_k \sin(k+1/2)\, t/\sin\, t/2$$

$$N_n^{p,q}(t) = 1/2\pi\, R_n \sum_{k=0}^{n} P_{n-k} q_k \cos(k+1/2)\, t/\sin\, t/2$$

$\zeta = [1/t]$ का समाकल अंश

$$\mathcal{J}_n(x) = 1/2\pi \int_{1/n}^{\pi} \Psi(t) \cot t/2\, dt$$

तथा $f(x) = limit_{n\to\infty} \mathcal{J}_n(x)$
जब भी बाद वाली स्थिति विद्यमान हो।

3. सक्सेना[3] ने फूरियर श्रेणी की एकसमान हार्मोनिक संकलनीयता के लिए दो प्रमेय स्थापित किये हैं और त्रिपाठी तथा सिंह[4] ने सक्सेना के परिणाम[3] को सुधारा है। प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य फूरियर श्रेणी तथा इसकी संयुग्मी श्रेणी की एकसमान *(N, p, q)* संकलनीयता का कुछ भिन्न दशा के लिए अध्ययन करना तथा निम्नांकित दो प्रमेयों को स्थापित करना है।

प्रमेय 1. : माना कि $\lambda(t)$ तथा $\mu(t)$ t के ऐसे धन फलन हैं कि $\lambda(t)$, $\mu(t)$ तथा $t\lambda(t)/\mu(t)$ t के साथ बढ़ते हैं। माना कि $\{p_m\}$ तथा $\{q_n\}$ दो अनृण एकदिष्ट अ-वर्धमान अनुक्रम हैं अचरों के तथा उनके अलोपमान आंशिक योग P_m तथा Q_n के जो अनन्त की ओर अभिमुख हैं ज्यों ज्यों क्रमशः m, $n \to \infty$
यदि

$$\sum_{k=0}^{n} \left|\Delta\left(P_{n-k}\, q_k\right)\right| = O\left(P_n/n\right), \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{3.1}$$

$$\lambda(n)\; R_n = O\left[\{\mu(R_n)\}^{\nu}\right] \text{ज्यों ज्यों } n \to \infty \tag{3.2}$$

जहाँ $0 \angle \nu \leq 1$
तथा

$$\phi(t) = \int_0^t |\varphi(u)|\; du = 0\left[\lambda(1/t)\; q_\zeta/\{\mu(R_\zeta)\}^{\nu}\right] \tag{3.3}$$

ज्यों ज्यों $t \to 0$ सेट E में एकसमान रूप से जिसमें $f(x^-)$ परिबद्ध है तब श्रेणी (2.1) संकलनीय (N, p, q) है E में योगफल $f(x)$ तक।

प्रमेय 2. माना $\{P_m\}$ एवं $\{q_n\}$ प्रमेय 1 जैसे ही हों और प्रतिबन्ध (3.1) की भी तुष्टि करें, माना $\lambda(t)$ तथा $\mu(t)$ उपर्युक्त की तरह प्रतिबन्ध (3.2) की तुष्टि करें यदि

$$\Psi(t) = \int_0^t |\Psi(u)|_o^{du} = 0\left[\lambda(1/t)\, q_\zeta / \{\mu(R_\zeta)\}^\nu\right] \quad (3.4)$$

ज्यों ज्यों $t \to 0_2$ $0 \angle \nu \leq 1$, E में एकसमान रूप से तो श्रेणी (2.2) सेट E में समान रूप से संकलनीय (N, p, q) है योगफल

$$\bar{f}(x) = 1/2\pi \int_0^\pi \Psi(t) \cot t/2 \; dt$$

के जब भी समाकल E में समान रूप से विद्यमान रहता है।

4. हमें अपने प्रमेय को सिद्ध करने के लिए निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता पड़ेगी-

प्रमेयिका - 1 : $0 \leq a < b \;\; \infty$, $0 < t \leq \pi$ तथा किसी n के लिए

$$\left| \sum_{k=a}^{b} P_{n-k} q_k \, e^{ikt} \right| < c \, R_\zeta$$

जहाँ c एक परम अचर है। यह मैकफैडेन की प्रमेयिका[2] से तुरन्त निकल आता है।

प्रमेयिका 2. यदि $R_n \to \infty$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$ तथा प्रतिबन्ध (3.1) तुष्ट होता हो तो

$$nq_n = O\left(R_n\right), \quad \text{ज्यों ज्यों} \quad n \to \infty$$

प्रमेयिका 2 की उपपत्ति : यह देखा जा सकता है कि यदि

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \Delta\left(P_{n-k}\, q_k\right) \right| = O\left(R_n/n\right)$$

तो

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \Delta\left(P_{n-k}\, q_k\right) \right| = O\left(R_n\right)$$

जब

$$\sum_{k=1}^{n} k\,\Delta\left(P_{n-k}\,q_k\right) = \sum_{k=1}^{n-2} \Delta\, k \sum_{\nu=1}^{k} \Delta\left(P_{n-\nu}\,q_\nu\right) + (n-1)\sum_{k=1}^{n=1} \Delta\left(P_{n-k}\,q_k\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-2} \Delta\, k\left(p_{n-1}\,q_1 - p_{n-k-1}\,q_{k+1}\right) + (n-1)\left(p_{n-1}\,q_1 - p_o\,q_n\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} p_{n-k}\,q_k - (n-1)\,p_o\,q_n$$

$$= \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\,q_k - p_n\,q_o - n\,q_n\,p_o$$

तथा इसलिए

$$n\,q_n p_o = R_n - \sum_{k=1}^{n-1} k\,\Delta\left(p_{n-k}\,q_k\right) - p_n\,q_o$$

का अर्थ है कि

$$n\,q_n = \mathrm{O}\,(R_n), \text{ ज्यों ज्यों } n \to \infty$$

प्रमेयिका 3 : यदि $0 \le t \le 1/n$ तो

$$N_n^{p,q}\,(t) = \mathrm{O}\,(n)$$

प्रमेयिका 3 की उपपत्ति : हमें ज्ञात है कि

$$\left|\,N_n^{p,q}\,(t)\,\right| = 1/2\pi\,R_n \left|\sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\,q_k \sin(k+1/2)\,t/\sin\,t/2\right|$$

$$= \mathrm{O}\,(1/R_n)\left|\sum_{k=0}^{n} (2\,k+1)\,p_{n-k}\,q_k\right|$$

$$= \mathrm{O}\left[(2\,n+1)/R_n \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\,q_k\right|$$

$$= O(n), \text{ ज्योंज्यों } n \to \infty$$

प्रमेयिका 4 : $1/n \le t \le \delta < \pi$ के लिए

$$N_n^p, q\} \ (t) = O\left[R_z/tR_n\right]$$

प्रमेयिका 1 का उपयोग करने पर उपपत्ति निकलती है।

प्रमेयिका 5 : प्रमेयिका 3 तथा 4 की तरह $0 \le t \le 1/n$ के लिए हम पाते हैं -

$$\overline{N}_n^{p,q} \ (t) = 0\,(n)$$

तथा क्योंकि $1/n \le t \ \delta \le \pi$,

$$\overline{N}_n^{p,q} \ (t) = O\left(R_z/t \ R_n\right)$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$

5. प्रमेय 1 की उपपत्ति : श्रेणी (2.1) में nवें आंशिक योग के सेट E में $t = x$ पर $\sigma_n(x)$ द्वारा प्रदर्शित करने पर

$$\sigma_n(x) - f(x) = 1/2\pi \int_0^\pi \varphi(t) \sin(n+1/2)\, t/\sin t/2 \ dt$$

इसलिए (1.2) का अनुसरण करते हुए $\{\sigma_n(x)\}$ के (N, p, q)वें रूपान्तर को निम्नांकित के द्वारा व्यक्त किया जाता है-

$$t_n^{p,q}(x) - f(x) = 1/R_n \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k \left\{\sigma_k(x) - f(x)\right\}$$

$$= 1/2\pi \ R_n \sum_{k=0}^{n} p_{n-k}\, q_k \int_0^\pi \varphi\ (t) \ \sin(k+1/2) \ t/\sin t/2 \ dt$$

$$= \int_0^\pi \varphi\ (t) \left\{1/2\pi R_n \sum_{k=0}^{n} \left\{p_{n-k} q_k \ \sin\ (k+1/2) \ t/\sin t/2\right\} dt\right.$$

$$= \int_0^\pi \varphi(t)\, N_n^{p,q}(t)\, dt$$

$$= \left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta} + \int_0^{\pi} \varphi(k) \right) dt\, N_n^{p,q}(t)\, dt, \quad 0 < \delta < \pi$$

$$= I_1 + I_2 + I_3, \text{ माना} \tag{5.1}$$

अब प्रमेय 1 को सिद्ध करने के लिए हमें यह दिखाना है कि हमारी कल्पना $I = I_1 + I_2 + I_3 = 0(1)$ ज्यों ज्यों $n \to \infty$, E में एक समान से (5.2)।

सर्वप्रथम I_1 पर विचार करने पर

$$|I_1| = O\left[\int_0^{1/n} [\varphi(t)| \; |N_n^{p,q}(t)|\; dt \right]$$

$$= O(n) \int_0^{1/n} |\varphi(t)|\, dt \quad \text{प्रमेयिका 3 का उपयोग करने पर}$$

$$= O(n) \cdot 0\left[\lambda(n)\, R_n / \{\mu(R_n)\}^{v} \right], \text{ (3.3) का प्रयोग करने पर}$$

$$= 0\left[\lambda(n)\, R_n / \{\mu(R_n\}^{v} \right], \text{ प्रमेयिका 2 का प्रयोग करने पर}$$

$$= 0(1) \tag{5.3}$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, E में एक समान रूप से

इसके बाद I_2 पर विचार करने पर

$$|I_2| = O\left[\int_{1/n}^{\delta} |\varphi(t)| \; |N_n^{p,q}(t)|\; dt \right]$$

$$= O(1/R_n) \int_{1/n}^{\delta} |\varphi(t)|\, R_\zeta\, dt/t$$

$$= O(1/R_n) \left[\{\varphi(t)\, R_\zeta / t\}_{1/n}^{\delta} \right]$$

$$+ O\ (1/R_n) \int_{1/n}^{\delta} \left\{ \phi\ (t)\ R_\zeta / t^2 \right\} dt$$

$$+ O\ (1/R_n) \int_{1/n}^{\delta} \left\{ \phi\ (t)\ 1/t \right\} d \left(R_\zeta \right)$$

$$= I_{2.1} + I_{2.2} + I_{2.3} \ldots\ldots, \text{माना} \tag{5.4}$$

अब

$$I_{2.1} = O\ (1/R_n) \left[\phi\ (t)\ R_\zeta / t \right]_{1/n}^{\delta}$$

$$= O\ (1/R_n) + 0 \left[n \lambda\ (n)\ q_n / \left\{ \mu\ (R_n) \right\}^{\nu} \right]$$

$$= 0\ (1) + 0 \left[\lambda\ (n)\ R_n / \left\{ \mu\ (R_n \right\}^{\nu} \right]$$

$$= 0\ (1) + 0\ (1)$$

$$= 0\ (1),$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, E में एक समान रूप से। (5.5)

पुनश्चः

$$I_{2.2} = O\ (1/R_n) \left[\int_{1/n}^{\delta} \left\{ \phi\ (t)\ R_\zeta / t^2 \right\} dt \right]$$

$$= 0\ (I) + O\ (1/R_n) \sum_{m=1}^{n-1} \int_{m}^{m+1} \phi\ (1/u)\ R_{[u]}\ du$$

लेकिन

$$\int_{m}^{m+1} \phi\ (1/u)\ R_{[u]}\ du \leq \phi\ (1/m)\ R_m$$

$$= 0 \left[\lambda\ (m)\ q_m\ R_m / \left\{ \mu\ (R_m) \right\}^{\nu} \right]$$

$$= 0\left(q_m\right)$$

ज्यों ज्यों $m \to \infty$ । E में एक समान रूप से

अतः

$$I_{2.2} = 0\,(1) + O\,(1/R_n) \cdot 0\left(\sum_{m=1}^{n-1} q_m\right)$$

$$= 0\,(1) + 0\,(1)$$

$= 0\,(1)$, ज्यों ज्यों $n \to \infty$ E में एक समान रूप से (5.6)

पुनः

$$I_{2.3} = O\,(1/R_n) \int_{1/n}^{\delta} \{\phi\,(t)\; 1/t\}\, d\; R_{\zeta}$$

$$= O\,(1/R_n) \int_{1/\delta}^{n} \phi\,(t)\; v\, d\, R_{[v]}$$

$$= 0\,(1) + O\,(1/R_n)\left\{\sum_{m=1}^{n-1} R_m\; \phi\,(1/m)\right\}$$

$$= 0\,(1) + 0\,(1/R_n \sum_{m=1}^{n-1}\left[\lambda\,(m)\, q_m\; R_m / \left\{\mu\,(R_m)\right\}^{v}\right]$$

$$= 0\,(1) + 0\,(1)$$

$= 0\,(1)$, ज्यों ज्यों $n \to \infty$, E में एक समान रूप से (5.7)

(5.4) से (5.7) तक से यह निकलता है कि

$$I_2 = 0\,(1), \qquad (5.8)$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, E में एक समान रूप से

अन्त में

$$\left| I_3 \right| = O\left[\int_\delta^\pi \left| \varphi (t) \right| \left| N_n^{p,q} (t) \right| dt \right]$$

$$= 0 (1), \tag{5.9}$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty, E$ में एकसमान रूप से F हार्डी तथा रोगोसिन्स्की[1] के ज्ञात परिणाम तथा संकलन की विधि की नियमितता के बल पर।

(5.3), (5.8) तथा (5.9) को मिलाने पर हमें (5.2) का वांछित परिणाम प्राप्त होता है। इस तरह प्रमेय 1 की उपपत्ति पूर्ण होती है।

प्रमेय 2 की उपपत्ति

E में $t = x$ बिन्दु पर श्रेणी (2.2) का nवाँ आंशिक योग $\sigma (x)$ निम्नवत् प्रदर्शित किया जाता है-

$$\sigma_n (x) = 1/2\pi \int_0^\pi \Psi (t) \left\{ \cos t/2 - \cos (n + 1/2)\, t/\sin t/2 \right\} dt$$

$\sigma_n (x)$ के रूपान्तर (N, p, q) को $t_n^{p,q} (x)$ द्वारा प्रदर्शित करने पर हमें (1.2) का अनुसरण करने पर मिलता है-

$$t_n^{p,q} (x) - 1/2\pi \int_0^\pi \Psi (t) \{\cot 1/2 \ t\} dt$$

$$= 1/2 R_n \sum p_{n-k} \ q_k \ \sigma_n (x) - 1/2\pi \int_0^\pi \Psi (t) \cot t/2 \ dt$$

$$= \int_0^\pi 1/R_n^{2\pi} \sum \left[P_{n-k} \ q_n \ \{ \cot t/2 - \cos (k + 1/2) \ t\} \ \Psi (t)/\sin t/2 \right] dt$$

$$- 1/2\pi \int_0^\pi \{ \Psi (t) \cos t/2 \} \ dt$$

$$= - \int_0 \Psi (t) \ 1/2\pi \ R_n \sum P_{n-k} \ q_k \{ \cos (k + 1/2) \ t \} \ t/ \sin t/2 \ \} dt$$

$$= - \int_0 \Psi\ (t)\ N_n^{p,q}\ (t)\ dt$$

$$= -J, \text{ माना}$$

जहाँ

$$J = \int_0^{\pi} \Psi\ (t)\ N_n^{p,q}\ (t)\ dt$$

अब हमें यह दिखलाना है कि

$$J = 0(1) \qquad (6.1)$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$ E में एकसमान रूप से ।

$0 < \delta < \pi$, के साथ हम लिखेंगे

$$J = \int \Psi\ (t)\ N_n^{p,q}\ (t)\ dt$$

$$= \int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta} + \int_0^{\pi} \Psi\ (t)\ \Psi\ (t)\ N_n^{p,q}\ (t)\ dt$$

$$= J_1 + J_2 + J_3, \text{ माना} \qquad (6.2)$$

सर्वप्रथम J_1 पर विचार करने पर

$$\left| J_1 \right| = O\left[\int_0^{1/n} \Psi\ (t) \left| \overline{N}_n^{p,q}\ (t) \right| dt \right]$$

$$= O(n) \left[\int_0^{1/n} \mid \Psi\ (t) \mid dt \right]$$

$$= O\ (n) \cdot 0 \left[\lambda\ (n)\ q_n / \{ \mu\ (R_n) \}^{\nu} \right]$$

$$= 0 \left[\lambda\ (n)\ q_n / \{ \mu\ (R_n) \}^{\nu} \right]$$

$$= 0\,(1) \tag{6.5}$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, E में एक समान रूप से

इसके आगे

$$\left| J_2 \right| = O \left[\int_{1/n}^{\delta} \left| \Psi\ (t) \right| \left| \overline{N}_n^{p,q}\ (t) \right|\ dt \right]$$

$$= O\ (1/R_n) \int_{1/n}^{\delta} \mid \Psi\ (t) \mid R_{\zeta} / t\ dt$$

$$= O\,(1), \tag{6.4}$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, E में एकसमान रूप से

I_2 की उपपत्ति के ही समान अनुसरण करने पर।

अपरंच

$$J_3 = 0\,(1) \tag{6.5}$$

ज्यों ज्यों $n \to \infty$, E में एक समान रूप से हार्डी तथा रोगोसिन्स्की[1] के परिणाम का तथा संकलन की विधि की नियमितता का उपयोग करते हुए (6.2), (6.3), (6.4) एवं (6.5) को जुटाने पर हमें (6.1) का वांछित परिणाम प्राप्त होता है। इस तरह प्रमेय 2 की उपपत्ति पूरी हुई।

उपप्रमेय 1

$q_n = 1$ की अवस्था के लिए, प्रत्येक n तथा $\nu = 1$ के लिए, हमारे प्रमेयों के प्रतिबन्ध तथा परिणाम त्रिपाठी तथा सिंह[4] के परिणाम में समानीत होते हैं।

उपप्रमेय 2

$p_n = 1/n + 1$, $q_n = 1$, $\lambda\,(t) = 1$, $\nu = 1$ तथा $\mu\,(t) = t$ के लिए हमारे प्रमेयों के प्रतिबन्ध तथा परिणाम सक्सेना के परिणाम[3] देते हैं।

निर्देश

1. हार्डी जी. एच. तथा रोगेसिन्स्की, डब्ल्यू. डब्ल्यू. : Camb. Tracts. Maths., 1944, 38, 24.

2. मैकफैडेन, एल. : Duke Math. J., 1942, 9, 168-207.

3. सक्सेना, ए. : Proc. Nat. Inst. Sc. India, 1965, A 31, 303-310.

4. त्रिपाठी, एल. एम. तथा सिंह, के. एन. : Bull. Cal. Math. Soc., 1980, 72, 233-239.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 3, July 2000.

केंचुए तथा वर्मीकम्पोस्टिंग - एक समीक्षा

शिव गोपाल मिश्र तथा संजीव त्रिपाठी
शीलाधर मृदा शोध संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त - अक्टूबर 15, 1999]

सारांश

केंचुए मृदा के जीवों में महत्वपूर्ण स्थान रखते हैं। ये मृदा उर्वरता सुधारने, मृदा पृष्ठ पर कृमिमल (wormcast) संचित करने, पोषक तत्वों के पुनर्चक्रण तथा खरपतवार को विघटन करने के लिए विख्यात हैं। हाल ही में घरेलू तथा औद्योगिक अपशिष्टों की ऐसी निपटान विधियों की माँग बढ़ी है जो पर्यावरणीय प्रदूषण कम से कम कर सकें। इसमें केंचुओं का उपयोग किया जा रहे हैं। फलस्वरूप कृषकवर्ग में वर्मीकल्चर तथा वर्मीकम्पोस्टिंग लोकप्रिय हो रहे हैं। विगत वर्षों में जो प्रगति हुई है और जो प्रौद्योगिकी विकसित की गई है उसकी समीक्षा भारतीय परिप्रेक्ष्य में प्रस्तुत की जा रही है।

Abstract

Earthworms and Vermicomposting : A Review. *By* S. G. Misra and Sanjeev Tripathi, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad - 211002 (India)

Earthworms, an important component of soil fauna, are well-known for ameliorating soil fertility, deposting wormcasts on the soil surface, recycling of nutrients and decomposing plant litter. In recent years, increasing demand for methods of disposal of domestic and industrial wastes that minimize environmental pollution has resulted in increased interest in the possibility of using earthworms. As a result vermiculture and vermicomposting have drawn considerable attention of agriculturists. The advances made and the technology developed during the past years is being reviewed with special reference to Indian scenario.

भारतीय प्राकृतिक इतिहास के विश्वकोश में केंचुओं को 'प्रत्येक उद्यान का परिचित निवासी' बताया गया है जिन्हें वर्षा के दिनों में, जब ये सर्वाधिक सक्रिय होते हैं, बड़ी मात्रा में देखा जा सकता है।' निस्सन्देह उपोष्ण घास के मैदानों के मृदा-जीवों के महत्वपूर्ण घटक के रूप में केंचुए जाने जाते हैं जो मृदा उर्वरता को सुधारते हैं, मिट्टी को उलटते-पलटते हैं और मिट्टी की सतह पर अपना मल जमा करते हैं, पोषक तत्वों का पुनर्चक्रण करते हैं तथा पौधों के अवशोषों को विघटित करते हैं।

केंचुओं की प्रजातियाँ, उनकी बहुलता तथा मिट्टी में ऊपर से नीचे की ओर उनकी गति एक मृदा से दूसरे में बदलती रहती है।[1] इन सबका निर्धारण भोजन, परजीवी तथा जलवायु सम्बन्धी (पर्यावरणीय) कारकों और मृदा के भौतिक-रासायनिक गुणधर्मों द्वारा होता है। फिर भी परजीवी तथा भक्षकों द्वारा केंचुओं का सफाया सम्पूर्ण मृत्यु का बहुत छोटा अंश होता है।

केंचुए मिट्टी को पेट के भीतर ले जाते हैं और अर्ध विघटित कार्बनिक पदार्थ के साथ मिश्रित करके बारीक या कुछ मोटी गोलियों के रूप में मिट्टी की सतह पर एकत्र कर देते हैं और ऐसे बिल (छिद्र) बनाते हैं जो मिट्टी में नीचे तक बिंधे रहते हैं। इन सबके फलस्वरूप उत्तम मृदा संरचना को प्रोत्साहन मिलता है। डार्विन ने[2] 1881 में ही केचुओं के कार्यकलापों तथा आदतों के विषय में एक रोचक पुस्तक लिखी थी।

अनुमान है कि इस तरह केंचुए प्रतिवर्ष प्रतिहेक्टर लगभग 268 टन मिट्टी को उलट पुलट डालते हैं। यह भी ज्ञात किया जा चुका है कि प्रति हेक्टर केंचुओं का भार 22 टन तक हो सकता है। यह भलीभाँति सिद्ध किया जा चुका है कि केंचुए मिट्टी के वातन, जलधारण क्षमता तथा जल निकास को सुधारते हैं।[3] फलस्वरूप ऐसी मिट्टियाँ जिनमें केंचुओं की भारी संख्या पाई जाती है उनकी जल निकासी ठीक रहती है और वे शुष्क दशा में आर्द्रता को बनाये रख सकती हैं।

इसके भी प्रमाण हैं कि केंचुए मिट्टियों में खनिज पोषकों की उपलब्धता को प्रभावित करते हैं। कृमि-मल में मूल मिट्टी की तुलना में काफी अधिक नाइट्रेट, उच्च धनायन विनिमय क्षमता, उच्च विनिमयशील कैल्सियम, मैग्नीशियम तथा पोटैशियम और उपलब्ध फास्फोरस पाया जाता है।[4]

यह भी ज्ञात किया जा चुका है कि केंचुए के आमाशय से होकर निकलने वाली मिट्टी में सूक्ष्मजीवों की संख्या अधिक होती है।[3]

केंचुओं का उपयोग पशु, वनस्पति तथा उद्योग से प्राप्त कार्बनिक अपशिष्ट को विघटित करके उपयोगी कम्पोस्ट तैयार करने के लिए किया जाता है।[5]

कृषिकरण तथा उर्वरकों का प्रभाव

बारम्बार जुताई करने से केंचुओं की संख्या घटती है किन्तु एक-दो बार जुताई से जनसंख्या में बढ़ोत्तरी होती है।[6] वस्तुतः बारंबार जुताई करने से मिट्टी में कार्बनिक पदार्थ घटने से ही केंचुओं

की संख्या घटती है। किन्तु यदि इन मिट्टियों में कार्बनिक पदार्थ डाला जाय तो संख्या बढ़ती है। जुताई करने से कार्बनिक पदार्थ मिट्टी की ऊपरी सतह में भलीभाँति मिल जाता है जिससे कुछ प्रजातियाँ यथा **ए० क्लोरोटिका** की संख्या बढ़ती है। अनेक कृष्य मिट्टियों में सतह पर इतना कम कार्बनिक पदार्थ रहता है कि बहुत नीचे तक बिल बनाने वाली प्रजातियाँ ऊपर आने के लिए आकृष्ट नहीं होतीं। गहरा बिल बनाने वाली कुछ जातियाँ हैं - **ए० टेरेस्ट्रिस, ए० लांगा** तथा **ए० नोक्टुर्ना**। इनके लिए मिट्टी की जितनी कम जुताई की जाय उतना ही लाभप्रद है

जुती मिट्टियों में जब अन्न की फसलें उगाई जाती हैं तो केंचुओं द्वारा बनाये गये बिल उनकी जड़ों को नीचे तक जाने और अधिक उपलब्ध पोषण प्राप्त करने में सहायक होते हैं।[6]

मारिस ने[7] ने देखा है कि गोबर की खाद डालने से बिना खाद डाले गये खेतों की अपेक्षा केंचुओं की संख्या 2-2.5 गुनी अधिक होती है। यह भी पाया गया है कि सतह के निकट रहने वाले केंचुओं को नाइट्रोजन उर्वरक की अधिक मात्रा प्रोत्साहित करती है। नाइट्रोजन जिस रूप में डाला जाता है उसका भी प्रभाव पड़ता है। उदाहरणार्थ अमोनियम सल्फेट डालने से मृदा में अम्लता उत्पन्न होती है जिसका हानिकारक प्रभाव केंचुओं की संख्या पर पड़ता है।[8] कैल्सियम उर्वरक[9] तथा सुपरफास्फेट से भी[10] केंचुओं को प्रोत्साहन मिलता है।

केंचुओं का मिट्टी पर भौतिक तथा रासायनिक प्रभाव

केंचुओं के मल में मिट्टी के साथ पाचित तथा अपाचित वनस्पति अवशेष मिले रहते हैं। तमाम केंचुए अपने मल को अपने बिलों में या अन्य रिक्त स्थानों में निक्षेपित करते हैं। कुछ जातियाँ ऊर्ध्वाधर बिलों में रहती हैं अतः वे अपने मल को मिट्टी की सतह पर, जहाँ उनका बिल खुलता है, एकत्र करती रहती हैं। वह मल जो मिट्टी की सतह के नीचे निक्षिप्त होता है मृदा निर्माण में योगदान करता है किन्तु जो सतह पर एकत्र होता है वह मृदा परिच्छेदिका विकास तथा मृदा संरचना में अधिक महत्वपूर्ण भूमिका निभाता है।[11] कभी कभी मल का बहुत बड़ा गुच्छ बनता है जो 90 ग्राम तक हो सकता है। 5 सेमी ऊँचे तथा 5 सेमी चौड़े और 25-45 ग्राम भार वाले गुच्छ देखे गये हैं। ब्रह्मदेश से 1.6 किग्रा तक का गुच्छ पाया गया।[12] ये गुच्छ संघट्टन के रूप में वर्षा की बूँदों के प्रति प्रतिरोधी होते हैं। इनका स्थायित्व कार्बनिक पदार्थ की मात्रा और प्रकार पर तथा उनमें होने वाली सूक्ष्मजैविक सक्रियता पर निर्भर करता है।[1]

केंचुए पूरे वर्ष भर तक मल नहीं निकालते। यूरोप तथा जापान के शीत प्रदेशों में केंचुए मिट्टी में नीचे चले जाते हैं तब मल नहीं एकत्र होता। इसी तरह ग्रीष्म ऋतु में न के बराबर मल निकलता है। उपोष्ण भागों में सामान्यतया आर्द्र ऋतु में मल एकत्र होता है। केंचुए मृदावायु के आयतन को 8-30% तक बढ़ा देते हैं।[13] जिन मिट्टियों में केंचुए प्रविष्ट कराये गये उनमें अन्तःस्यंदन (Infiltration) की मात्रा 24 घंटों में 120-140 गुना बढ़ती पाई गई।[14]

यह भी देखा गया है कि मल में नाइट्रेट तथा अमोनियम आयनों की सान्द्रता निकटवर्ती मिट्टी की तुलना में अधिक होती है। मल में 4.3% कार्बन तथा 0.39% नाइट्रोजन रहता है। इस तरह मल से प्रतिवर्ष प्रति वर्गमीटर क्षेत्रफल से 142 ग्राम कार्बन तथा 13 ग्राम नाइट्रोजन प्राप्त होता है। मल में पालीसैकराइडों की मात्रा पास की अछूती मिट्टी की तुलना में 6-7 गुनी पाई गई है। वास्तव में यह पालीसैकराइड जीवाणुओं द्वारा उत्पन्न होता है और मल का स्थायित्व इसी पर निर्भर करता है। दाश तथा पात्र ने[15] मल में 0.47% नाइट्रोजन पाया जबकि पास की मिट्टी में इसकी मात्रा 0.35% थी।

केंचुए के ऊतक में प्राप्य नाइट्रोजन प्रोटीन के रूप में रहता है। केंचुओं में शुष्क भार का 60-80% प्रोटीन पाया गया है। केंचुए बहुत ही अल्प मात्रा में फास्फोरस उत्सर्जित करते हैं यद्यपि कार्बनिक पदार्थ के साथ उनके पाचन तन्त्र में काफी फास्फोरस प्रविष्ट करता है। फिर भी मल में प्राप्य उपलब्ध फास्फोरस, नीचे की मिट्टी की तुलना में अधिक होता है। यह अधिक मात्रा 5-10 गुनी हो सकती है। मल में आसपास की मिट्टी की तुलना में 1.3 गुना अधिक कैल्सियम देखा गया है।

पौधों की वृद्धि पर केंचुओं का प्रभाव

यह पाया गया है कि जिन भूखण्डों में केंचुएँ प्रविष्ट करा कर घासें उगाई गईं उनमें बिना केंचुओं वाले भूखण्डों की तुलना में 100-280 प्रतिशत अधिक उपज मिली।[16] इतना ही नहीं, बोई गई फसल के अनुसार केंचुओं का जैवभार (Biomass) भी बढ़ा हुआ पाया गया। मृत केंचुए डालकर फसलें उगाई गईं तो भी लाभ मिला। गमलों में सम्पन्न हुए प्रयोगों से यह ज्ञात हुआ कि केंचुओं की उपस्थिति में घास, गेहूँ तथा क्लावर की उपज में क्रमशः 287%, 111% तथा 877% वृद्धि हुई। केंचुओं का मल डालने से गोबर की खाद डालने की अपेक्षा मक्के की बाढ़ अधिक अच्छी रही।[17]

वर्मीकम्पोस्टिंग (Vermicomposting)

इधर के वर्षों में कार्बनिक अवशेषों के विघटन हेतु केंचुओं का उपयोग हुआ है। 1970-80 के दशक में केंचुओं की कुछ प्रजातियों द्वारा जैव-ठोसों को उपयोगी वर्मीकम्पोस्ट में परिणत करने के प्रयोग हुए। इंग्लैण्ड में[18] 1981 में पक्षियों, सुअरों, गोपशुओं तथा शहरी अवशेषों को संसाधित करने का कार्य शुरू किया गया।

वर्मीकम्पोस्टिंग में निहित सिद्धान्त सरल तथा परम्परागत कम्पोस्टिंग जैसे ही हैं। कुछ केंचुए कार्बनिक अपशिष्टों को अपनी पेषणी (grinding gizzard) में से गुजार कर बहुत तेजी से छिन्न-भिन्न कर देते हैं। वे कार्बनिक पदार्थों में वृद्धि करने वाले जीवों से अपना पोषण प्राप्त करते हैं। साथ ही वे सूक्ष्मजीवी सक्रियता को संवर्धित करते हैं जिससे उनके द्वारा निकाला गया मल (cast) उनके द्वारा ग्रहण किये गये पदार्थ की अपेक्षा अधिक महीन तथा सूक्ष्मजीवी रूप से सक्रिय होता है। इस

प्रक्रम के दौरान कार्बनिक पदार्थ में विद्यमान पादप पोषण - विशेषतया नाइट्रोजन, फास्फोरस, पोटैशियम तथा कैल्सियम मुक्त होते हैं और सूक्ष्मजीवी क्रिया के द्वारा मूल यौगिकों की अपेक्षा अधिक विलेय तथा पौधों द्वारा ग्रहणीय रूप में बदल दिये जाते हैं।

केंचुए प्रतिदिन अपने भार से कई गुनी अधिक मात्रा में विभिन्न अवशिष्टों को ग्रहण कर सकते हैं और फिर उसे बाहर निकाल देते हैं। परम्परागत वायुजीवी कम्पोस्टिंग प्रक्रम में कार्बनिक पदार्थों को नियमित रूप से उलटना पुलटना होता है। किन्तु वर्मीकम्पोस्टिंग में केंचुओं द्वारा वायुजीवी दशाएं बनी रहती हैं और उलटने-पुलटने की आवश्यकता नहीं पड़ती है। वर्मीकम्पोस्टिंग को 35^0 से० से नीचे ताप पर सम्पन्न किया जाना होता है।

केंचुए कम्पोस्ट के ढेर की सतह से 6-9 इंच नीचे सक्रिय रहकर कार्बनिक पदार्थ का उपभोग करते हैं। सामान्यतया ढेर में प्रतिदिन या दो दिन बाद एक इंच ऊँचा कार्बनिक पदार्थ डालना होता है। वर्मीकम्पोस्टिंग के लिए कोंई भी कृषीय, शहरी या औद्योगिक कार्बनिक पदार्थ प्रयुक्त किया जा सकता है। किन्तु कभी कभी ऐसे पदार्थ को केंचुओं द्वारा ग्राह्य बनाने के लिए धुलाई, पेषण या मिश्रित करने की आवश्यकता होती है। सामान्यतः पशुओं का गोबर, कागज उद्योग के अपशिष्ट, जैव ठोस शहरी कचरा वर्मीकम्पोस्टिंग के लिए उपयुक्त होते हैं।

वर्मीकम्पोस्टिंग के लिए केंचुओं की तमाम प्रजातियाँ काम में लाई गई हैं। इनमें से सबसे सामान्य है **आइसेनिया फीटिडा** (*Eisenia foetida*)। अन्य उपयुक्त प्रजातियों में **लुम्ब्रिकस रूबेलस** (*Lumbricus rubellus*), **यूड्रिलस यूजीनिया** (*Eudrilus eugeniae*) तथा **पेरियोनिक्स एक्सकैवेटस** (*Perionyx excaratess*) उल्लेखनीय हैं। अन्तिम दो प्रजातियाँ अधिक निम्न ताप पर कार्य नहीं कर पातीं।

वर्मीकल्चर की परम्परागत विधि में जमीन पर 18 इंच गहरे गढ़ों में अपशिष्ट डाले जाते हैं। इसके लिए काफी स्थान लगता है, और उलटने-पुलटने के लिए मजदूरों की जरूरत पड़ती है। इसमें कार्बनिक पदार्थ धीरे-धीरे 6-18 महीनों में पूरी तरह विघटित होते हैं। इससे पादप पोषकों का यथेष्ठ अंश वाष्पीकृत हो जाता है और कभी कभी भौम जल प्रदूषित हो जाता है। कहीं कहीं बड़े बड़े पात्रों या कोठारों में वर्मीकम्पोस्ट तैयार किया जाता है।

भारत में कई स्थानों पर वर्मीकल्चर के प्रयोग चल रहे हैं। बंगलोर में **यूड्रिलस यूजीनिया** तथा **आइसेनिया फीटिडा** प्रजातियों का सफलतापूर्वक प्रयोग हो रहा है। पुणे में वर्मीकम्पोस्टिंग पर चल रहे कार्य से किसान आकृष्ट हुए हैं। यहाँ पर **फेरेटेमा एलांगाटा** तथा **आइसेनिया फीटिडा** प्रजातियाँ प्रयुक्त की जा रही हैं। फेरेटेमा एलांगाटा गन्ने की छोई तक को आसानी से विघटित कर देता है। कोयम्बटूर के चाय बगानों में भी वर्मीकम्पोस्टिंग के प्रयोग चल रहे हैं। बनारस विश्वविद्यालय में संयुक्त राज्य के सहयोग से चलाये जा रहे प्रजेक्ट में **ऐमीन्थस मोरिसी** (*Amynthas morrisi*), **डाइकोगैस्टर बोलौई** (*Dichogaster bolaui*) तथा **पीरियोनिक्स संसिबैरिकस** (*Perionyx sansibaricus)* प्रजातियाँ सशक्त विघटक पाई गई हैं। नीरी नागपुर के वैज्ञानिकों में शाकपात अपशिष्टों के विघटन हेतु

फेरेटिमा एक्सकैवेटस (*Pherotima excavatus*) को उपयोगी बताया है। मद्रास तथा हैदराबाद में भी स्थानीय परिस्थितियों के अनुरूप प्रजातियाँ ढूँढी जा चुकी हैं।

भूमि प्रबन्धन तथा सुधार के लिए **पालीफेरे टिमा एलांगाटा** (*Polypheretima elongata)* अत्यधिक उपयुक्त पाई गई है।

चूँकि गर्म तथा उपोष्ण प्रदेशों में केंचुओं द्वारा उपापचयी क्रिया तेजी से सम्पन्न होती है इसलिए भारत में वर्मीकल्चर प्रौद्योगिकी के विकास की महती सम्भावना है। ठोस अपशिष्टों के निपटान में विषैले तत्वों की उपस्थिति बाधक बन सकती है क्योंकि लेखक[19] ने जो अध्ययन कराये हैं उनसे स्पष्ट है कि ताम्र, कैडमियम तथा क्रोमियम जैसे भारी तत्वों की उपस्थिति में केंचुए मर सकते हैं और इस तरह से बनी वर्मीकम्पोस्ट द्वारा उगाई गई फसलों के माध्यम से ये विषैले तत्व मनुष्यों तथा पशुओं के लिए हानिकर सिद्ध हो सकते हैं।

निर्देश

1. ली. के. ई. : Earthworms : Their Ecolohy and relationship with Soil and land use एकेडेमिक प्रेस, सिडनी, 1985.

2. डार्विन, चार्ल्स : The formation of Vegelable mould through the action of worms : मरे, लन्दन, 1881, पृष्ठ 326.

3. तेओतिया, एस. पी., डुले, एफ. एल. तथा मकोला, टी. एम. : Bull Nebraska Agric. Exp. Station, 1950, 165, 20.

4. निझवन, एस. डी. तथा अनवर, जे. एस. : Indian J. Agr. Sci. 1952, 22, 357-373.

5. एडवर्ड, सी. ए. : Span, 1983, 26, 106-108.

6. एडवर्ड, सी. ए. तथा लाफ्टी, जे. आर. : Soil Biol. Biochem. 1982, 14, 515-21.

7. मारिस, एच. एम. : Ann. Appl. Biol. 1922, 9, 282-305 तथा 14, 442-463.

8. सैचेल, जे. ई. : Soil Zoology में (सम्पादक डी. के. मक ईकेवन), बटरवर्थ, लन्दन 1955, पृष्ठ 180-20.

9. मार्शल, वी. जी. IV Colloquium Pedobiologiae पृष्ठ 109-117.

10. सियर्स, पी. डी. तथा ईवान्स, एल. टी. : N. Z. J. Sci Tech. 1953, 35A Supp. 1, 42-52.

11. बूचे, एम. वी. : Cent. Nat. Res. Sci., 1981, 303, 145-153.

12. गेट्स, जी. ई. Zool. Meded (Leiden), 1961, 37, 293-312.

13. वोलनी, ई. Agrik, Phys, Bodenk. 1890, 13, 381-395.

14. हूगपकैम्प, एम. इत्यादि : सैचेल द्वारा सम्पादित पुस्तक Earth worm Ecology में, 1983, पृष्ठ 85-105.

15. दाश, एन. सी. तथा पात्र, यू. सी. Rev. Ecol Biol. Sol 1977, 14, 461-471.

16. निएल्सन, आर. एल. N. Z. J. Agric 1951, 83, 433-435.

17. खान, ए. डब्ल्यू. Agric, Pak. 1966, 17, 415-434.

18. एडवर्ड, सी. ए. Biocycle जून 1996, 56-58.

19. मिश्रा, एस. जी. तथा मिश्रा, उमा शंकर : विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका, 1996, 39, 79-83.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 3, July 2000.

हाइपरज्यामितीय फलन के लिए एक द्वि-समाकल

शालू मालाणी तथा रचना माथुर
गणित विभाग, डूंगर महाविद्यालय, बीकानेर (राजस्थान)

[प्राप्त - मई 2, 2000]

सारांश

प्रस्तुत शोधपत्र में हाइपरज्यामितीय फलन के लिये एक रोचक द्वि-समाकल ज्ञात किया गया है। विशिष्ट दशाओं के रूप में हमें हाल ही में राठी, किम, चौई तथा छाजेड़ द्वारा प्राप्त द्वि-समाकल प्राप्त होते हैं।

Abstract

On a double integral involving Hypergeometric function, *By* Shaloo Malani and Rachana Mathur, Department of Mathematics, Dungar College, Bikaner (Rajasthan).

In this paper a double integral involving hypergeometric function has been evaluated. The double integrals very recently obtained by Rathie, Kim, Choi and Chhajer follow special cases of our main findings.

1. भूमिका एवं ज्ञात परिणाम.

1943 में प्रोफ़ेसर मित्रा[1] ने बहुचर्चित वाटसन प्रमेय का सार्वीकरण निम्न रूप में किया -

$$ {}_3F_2\left[\begin{matrix} a, & b, & c \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & \delta & \end{matrix} \middle| \right] = \frac{a^{a+b-2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(c-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(a)\;\Gamma(b)} $$

$$\times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}a\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}b\right) \Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)} \right.$$

$${}_7F_6 \left[\begin{matrix} c, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, c-\frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}\delta, c-\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}c+\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, \frac{1}{c}-\frac{1}{4}, c-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2} \end{matrix} \middle| \; 1 \right]$$

$$+ \left(\frac{2c-\delta}{\delta}\right) \frac{\Gamma\left(c+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(c-\frac{1}{2}a+1\right) \Gamma\left(c-\frac{1}{2}b+1\right)}$$

$${}_7F_6 \left[\begin{matrix} c, c+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}c+\frac{5}{4}, c-\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}\delta+1 \\ \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\delta+1, \frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}c+\frac{1}{4}, c-\frac{1}{2}a+1, c-\frac{1}{2}b+1 \end{matrix} \middle| \; 1 \right] \tag{1.1}$$

बशर्ते $Re\,(2\,\delta - 2\,c - a - b) > -1$

इसी क्रम में एडवर्ड[2] का एक रोचक द्वि-समाकल निम्न रूप से दिया जायेगा -

$$\int_0^1 \int_0^1 y^{\alpha} (1-x)^{\alpha-1} (1-y)^{\beta-1} (1-xy)^{1-\alpha-\beta} \, dx\, dy = \frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \tag{1.2}$$

बशर्ते $Re\,(\alpha) > 0$ तथा $\mathrm{Re}\,(\beta) > 0$

प्रस्तुत प्रपत्र में (1.1) तथा (1.2) के प्रयोग से एक रोचक द्वि-समाकल ज्ञात किया जायेगा।

2. मुख्य द्वि-समाकल

इस प्रपत्र में निम्नलिखित रोचक द्वि-समाकल का मान ज्ञात किया जायेगा जो नवीन प्रतीत होता है।

$$\int_0^1 \int_0^1 y^c (1-x)^{c-1} (1-y)^{\delta-c-1} (1-x)^{1-\delta}$$

$${}_2F_1 \left(a, b; \frac{1}{2}(a+b+1); \frac{y(1-x)}{1-xy} \right) dx\, dy$$

$$= \frac{a^{a+b-2}\, \Gamma(c)\, \Gamma(\delta-c)\, \Gamma\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c-\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\delta)\, \Gamma(a)\, \Gamma(b)}$$

$$\times \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}a\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}b\right) \Gamma\left(c+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(c-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)} \right.$$

$${}_7F_6 \left[\left. \begin{matrix} c, \frac{1}{2}a, \frac{1}{2}b, c-\frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}\delta, c-\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}c+\frac{3}{4} \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}c-\frac{1}{4}, c-\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}b+\frac{1}{2} \end{matrix} \right| 1 \right]$$

$$+ \left(\frac{2c-\delta}{\delta} \right) \frac{\Gamma\left(c+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(c-\frac{1}{2}a+1\right) \Gamma\left(c-\frac{1}{2}b+1\right)}$$

$${}_7F_6 \left[\left. \begin{matrix} c, c+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}a+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}b+\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}c+\frac{5}{4}, c-\frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, c-\frac{1}{2}\delta+1 \\ \frac{3}{2}, \frac{1}{2}\delta+1, \frac{1}{2}\delta+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}c+\frac{1}{4}, c-\frac{1}{2}a+1, c-\frac{1}{2}b+1 \end{matrix} \right| 1 \right] \tag{2.1}$$

बशर्ते $Re(c) > 0$ तथा $Re(2\delta - 2c - a - b) > -1$

3. उपपत्ति

द्वि-समाकल (2.1) को सिद्ध करने के लिये (2.1) के वाम-पक्ष को I द्वारा सूचित करते हैं। तत्पश्चात् हाइपरज्यामितीय फलन को श्रेणी के रूप में लिखते हैं फिर समाकल एवं श्रेणी का क्रम परिवर्तन करते हैं (जो कि श्रेणी के एक समान अभिसारी होने के कारण एवं दी गई शर्तों के तहत वैध है) तथा थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होता है -

$$I = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r \, (b)_r}{\left[\frac{1}{2}(a+b+1)\right]_r \, r!}$$
$$\int_0^1 \int_0^1 y^{c+r-1} \, (1-x)^{c+r-1} \, (1-y)^{\delta-c-1} \, (1-xy)^{1-\delta-r} \, dx \, dy$$

अब प्राप्त परिणाम में (1.2) का प्रयोग करें तो श्रेणी का योग करने पर हमें निम्नलिखित परिणाम प्राप्त होगा -

$$I = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(\delta-c)}{\Gamma(\delta)} \cdot {}_3F_2\left[\begin{matrix} 1, & b, & c \\ \frac{1}{2}(a+b+1), & \delta \end{matrix} \,\middle|\, 1\right]$$

अन्त में मित्रा के ज्ञात फल (1.1) का प्रयोग करने से हमें वांछित फल (2.1) प्राप्त होता है।

4. विशिष्ट दशाएँ

यदि हम (2.1) में क्रमशः $\delta = 2c, 2c + 1, 2c - 1, 2c + 2$ तथा $2c - 2$ रखें तो थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् हमें हाल ही में राठी, किम, सौई एवं छाजेड़[3] द्वारा निकाले गये द्वि-समाकल प्राप्त होते हैं।

इसी प्रकार हमारे समाकल (2.1) से कई अन्य रोचक दशाएँ ज्ञात की जा सकती हैं।

निर्देश

1. मित्रा, एम. सी. : Journal Indian Math. Society, 1943, 7 (3), 102-110.

2. एडवर्ड, जे. : A treatise on the Integral calculus with applications, examples and problems II, Chelsea Publication Co. New York 1954.

3. राठी, ए. के., किस, वाई. एस., चौई, जे. तथा छाजेड़, जी. सी. : Kyongpook Math. J., 1999, 39 (2), 293-302.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 3, July 2000.

मैट्रिक्स आर्गुमेण्ट के समाकल समीकरण का हल

आर. के. कुम्भट तथा योगेश शर्मा
गणित तथा सांख्यिकी विभाग, जैनारायण व्यास विश्वविद्यालय, जोधपुर (राजस्थान)

[प्राप्त - मार्च 25, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य गॉस-हाइपरज्यामितीय फलनों वाले समाकल समीकरण को हल करना है जिसका मैट्रिक्स आर्गुमेण्ट

$$g^{\alpha+\beta}(T) = \frac{1}{\Gamma p(\alpha)} \int_{U>0} {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha, -T^{-1/2}\, UT^{T-1/2}\right)$$

$$\times f(U)\, dU,\ R(\alpha+\beta, -\eta, \alpha) > \frac{p-1}{2}$$

जहाँ $g_T^{\alpha+\beta}(T)$ ज्ञात है और $f(U)$ को ज्ञात करना होता है T, तथा U वास्तविक, धानात्मक तथा संमित मैट्रिक्स हैं क्रम $p \times p$ के तथा $|T| = \mathbf{det}(T)\ T$ का सारणिक है।

Abstract

Solution of integral equation of matrix argument. *By* R. K. Kumbhat and Yogesh Sharma, Department of Methematics and Statistics, Jai Naran Vyas University, Jodhpur (Raj.)

The aim of the present paper is to solve the integral equation involving Gauss hyper-geometric functions of matrix argument :

$$g^{\alpha+\beta}(T) = \frac{1}{\Gamma p(\alpha)} \int_{U>0} {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha, -T^{-1/2}\, UT^{-1/2}\right)$$

$$\times f(U)\, dU,\ R(\alpha+\beta, -\eta, \alpha) > \frac{p-1}{2}$$

where $g^{\alpha+\beta}(T)$ is known and $f(U)$ is to be determined. "T" and "U" are real, positive, definite and symmetric matrices of order $p \times p$ and $|T| = \mathbf{det}\ (T)$ is the determinant of T.

By sucessive applications. of Laplace and inverse Laplace transforms of matrix argument, the solution of integral equation may be obtained. All the matrices considered are real, positive, definite and symmetric of order $p \times p$.

1. प्रस्तावना

समीकरण

$$L_2[f(\wedge)] = \int_{\wedge>0} etr\,(-\wedge z)\; f(\wedge)\, d\wedge = \phi(z) \qquad (1.1)$$

स्पेस समष्टि में माप $d\wedge$ के प्रति समाकल है जहाँ $\wedge$ तथा z वास्तविक, धनात्मक निश्चित तथा संमित मैट्रिक्स हैं क्रम $p \times p$ के, $Z = [\delta_{ij}\, z_{ij}]$, $\delta_{ij} = 1$ क्योंकि $i = j$, $\delta_{ij} = 1/2$ क्योंकि $i \neq j$, $etr\, X = e^{trX}$, $trX = X$ का लेश $= X$ के प्रमुख विकर्ण तत्वों का योग, f संमित फलन है इस मामले में कि $f(AB) = f(BA)$ तथा

$$d\wedge = d\wedge_{11}\, d\wedge_{21}\, d\wedge_{22}\, d\wedge_{31}\, d\wedge_{32}\, d\wedge_{33} \,.....\, d\wedge_{p_1} \,......\, d\wedge_{p_p}.$$

समस्त वास्तविक, धनात्मक निश्चित तथा संमित मैट्रिक्सों के सेट के लिए। यदि संमिश्र वैश्लेषिक फलन $\phi(Z)$ दक्षिण अर्धतल $R(Z) > X_0$ में पूर्णतया अभिसारी हो तो (1.1) $f(\wedge)$ का लाप्लास रूपान्तर कहा जाता है जहाँ $R(.)$ का अर्थ है (.) का वास्तविक अंश, X_0 स्थिर मान है X का तथा $Z = X + iY$, $i = \sqrt{-1}$
यदि

$$\int_{S^*_p} |\phi(X+iY)|\, dY < \infty \qquad \text{कुछ } X > X_0 \text{ के लिए}$$

तो

$$\frac{2^{\frac{p(p+1)}{2}}}{(2\pi j)^{\frac{p(p+1)}{2}}} \int_{R(z)=X>0} etr\,(\wedge z)\; \phi(z)\; dz = \begin{cases} f(\wedge), & \wedge > 0 \\ 0, & \text{अन्यत्र} \end{cases} \qquad (1.2)$$

जहाँ समाकल को $Z = X + iY$ में स्थिर X_0 सहित तथा Y को स्पेस S^*p में संगत स्पेस है $Z = [\delta_{ij}]$; $\delta_{ij} = 1$ का क्योंकि $i = j$ तथा $\delta_{ij} = 1/2$ क्योंकि $i \neq j$ देता है $\phi(z)$ का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर और $L^{-1}[\phi(z)] = f(\wedge)$ द्वारा प्रदर्शित किया जाता है।

मैट्रिक्स आर्गुमेंट वाले विशिष्ट फलनों के सम्प्रयोगों का वर्णन कई लेखकों[1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10] ने किया है।

$g^{\alpha+\beta}(T)$ के विभिन्न मानों के लिए समाकल समीकरण का हल सारणी के रूप में दिया जा रहा है।

2. समाकल समीकरण

निम्नांकित समाकल समीकरण पर विचार करें

$$g^{\alpha+\beta}(T) = \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)} \int_{U>0} {}_2F_1\left(\alpha+\beta, -\eta; \alpha; -T^{-1/2}\, U T^{-1/2}\right) f(U)\, dU \qquad (2.1)$$

जहाँ $T = T' > 0$, $U = U' > 0$, $R(\alpha+\beta, -\eta, \alpha) > (p-1)/2$. जहाँ $g^{\alpha+\beta}(T)$ दिया हुआ रहता है, $f(U)$ को ज्ञात करना होता है। U तथा T धनात्मक निश्चित संमित मैट्रिक्स हैं यानी

$$U = [U_{ij}]_{p\times p}, \quad T = [t_{ij}]_{p\times p}$$

हल : (2.1) में $|T|^{-(\alpha+\beta)}$ से गुणा करने तथा (2.1) से व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर L_x^{-1} लेने, समाकलन का क्रम बदलने एवं मथाई तथा सक्सेना[9] के परिणाम का उपयोग करने पर

$$L_x^{-1}\left[|T|^{-(\alpha+\beta)}\, g^{\alpha+\beta}(T)\right]$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(\alpha)\,\Gamma_p(\alpha+\beta)} \int_{U>0} {}_1F_1\left(-\eta, \alpha, -X^{1/2} U X^{1/2}\right) |X|^{\alpha+\beta-\frac{(p+1)}{2}} f(U)\, d(U)$$

$$(2.2)$$

(2.2) को $|X|^{-\beta}$ से गुणा करने तथा लाप्लास रूपान्तर (1.1) लेने, समाकल के क्रम को बदलने और मथाई तथा सक्सेना[9] का परिणाम प्रयुक्त करने पर

$$L_Y\left[|X|^{-\beta}\, L_x^{-1}\left(\{|T|^{-(\alpha+\beta)}\, g^{\alpha+\beta}(T)\right]\right.$$

$$= \frac{1}{\Gamma_p(\alpha+\beta)} \int_{U>0} {}_1F_0\left(-\eta, -\,[\text{illegible}]^{-1/2}\,[\text{illegible}]^{-1/2}\right) |Y|^{-\alpha} f(U)\, dU \qquad (2.3)$$

इसके आगे (2.3) को $|Y|^{\alpha+\beta}$ से गुणा करने तथा व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर (1.2) लेने, समाकलन का क्रम बदलने और मथाई तथा सक्सेना[9] के परिणाम को प्रयुक्त करने पर

$$L_Z^{-1}\left[\,|Y|^{\alpha+\eta}\,L_x\left\{|X|^{-\beta}\,L_x^{-1}\left(|T|^{-(\alpha+\beta)}\;g^{\alpha+\beta}(T)\right)\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{\Gamma_P(\alpha+\beta)\,\Gamma_P(-\eta)}\int_{U>0}{}_0F_0(-ZU)\,|Z|^{-\eta\frac{(p+1)}{2}}f(U)\,dU$$

$$=\frac{Z|^{-\eta-\frac{(P+1)}{2}}}{\Gamma_P(\alpha+\beta)\;\Gamma_P(-\eta)}\,L_z\;\{f(U)\}\qquad(2.4)$$

$$\Rightarrow\Gamma_P(\alpha+\beta)\,\Gamma_P(-\eta)\,|Z|^{\eta+(P+1)/2}\;L_z^{-1}$$

$$[\,|Y|^{\alpha+\eta}L_Y\{\;|X|^{-\beta}L_X{-1}\,(|T|^{-(\alpha+\beta)}g^{\alpha+\beta}(T)\,\}\,]$$

$$=L_Z\;\{\,f(U)\,\}\qquad(2.5)$$

(2.5) के दोनों पक्षों का व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर L_x^{-1} (1.2) लेने पर हमें मिलता है-

$$\Gamma_P(\alpha+\beta)\,\Gamma_P(-\eta)\,L_u^{-1}|Z|^{\eta+(P+1)/2}\;L_z^{-1}|Y|^{\alpha-\eta}L_Y\{\;|X|^{-\beta}L_X{-1}$$

$$\times\;(|T|^{-(\alpha+\beta)}g^{\alpha+\beta}(T)\,\}\,]$$

$$=f(U)\qquad(2.6)$$

जो (2.1) का पूर्ण हल है।

पुष्टि (2.6) की पुष्टि करने के लिए

$$g^{\alpha+\beta}(T)=|T|\;|T|^{\gamma}\qquad(2.7)$$

पर विचार करें तथा इसे (2.5) के वाम पक्ष में रखें और मथाई तथा सक्सेना [9, p.105, (5.1.22)] का उपयोग करने पर-

$$L_X^{-1}\left[|T|^{-\alpha-\beta}\, g^{\alpha+\beta}(T)\right] = L_X^{-1}\left[|t|^{-\alpha-\beta+\gamma}\right]$$

$$= \frac{\left(|X|^{\alpha+\beta-\gamma-(P+1)/2}\right)}{\Gamma_P(\alpha+\beta-\gamma)}$$

पुनः मथाई तथा सक्सेना[10] का उपयोग करने पर

$$L_Y\left[|X|^{-\beta} L_X^{-1}(|T|^{-\alpha-\beta+\gamma})\right] = \frac{\Gamma_P(\alpha-\gamma)}{\Gamma_P(\alpha+\beta-\gamma)}|Y|^{\gamma-\alpha} \quad (2.9)$$

मथाई तथा सक्सेना[9] का उपयोग करते हुए हमें (2.10) प्राप्त होता है।

$$L_Z^{-1}\left[|Y|^{\alpha+\eta} L_Y\,\{|X|^{-\beta}\, L_X^{-1}(|T|^{-\alpha-\beta+\gamma})\}\right]$$

$$= \frac{\Gamma_P(\alpha-\gamma)\,|Z|^{-\gamma-\eta-\frac{(P+1)}{2}}}{\Gamma_P(\alpha+\beta-\gamma)\,\Gamma_P(-\gamma-\eta)} \quad (2.10)$$

अन्त में मथाई तथा सक्सेना[9] के परिणाम को प्रयुक्त करने पर हम लिखते हैं -

$$L_u^{-1}\left[|Z|^{(P+1)/2+\eta}\, L_Z^{-1}(|Y|^{\alpha+\eta}\, L_Y\{|X|^{-\beta}\, L_X^{-1}(T^{-\alpha-\beta+\gamma})\})\right]$$

$$= \frac{\Gamma_P(\alpha-\gamma)\,|U|^{\gamma-\frac{(p+1)}{2}}}{\Gamma_P(\alpha+\beta-\gamma)\,\Gamma_P(-\gamma-\eta)\,\Gamma_P(\gamma)} \quad (2.11)$$

$$\Gamma_P(\alpha+\beta)\,\Gamma_P(-\eta)\,L_U^{-1}[|Z|^{(P+1)/2+\eta}\,L_Z^{-1}\left\{|Y|^{\alpha+\eta}\,L_Y(|X|^{-\beta}\,L_X^{-1}(|T|^{-\alpha-\beta+\gamma}))\right\}]$$

$$= \frac{\Gamma_P(\alpha+\beta)\,\Gamma_P(-\eta)\,\Gamma_P(\alpha-\gamma)}{\Gamma_P(\alpha+\beta-\gamma)\,\Gamma_P(-\gamma-\eta)\,\Gamma_P(\gamma)}|U|^{\gamma-\frac{(P+1)}{2}}$$

अर्थात्

$$f(U) = \frac{\Gamma_P(\alpha+\beta)\,\Gamma_P(-\eta)\,\Gamma_P(\alpha-\gamma)}{\Gamma_P(\alpha+\beta-\gamma)\,\Gamma_P(-\gamma-\eta)\,\Gamma_P(\gamma)}|U|^{\gamma-\frac{(P+1)}{2}} \quad (2.12)$$

$$U = U' > 0 , R(\alpha+\beta , -\eta , \alpha) > (p-1)/2$$

(2.1) में $f(U)$ के ये मान रखें तो समाकल समीकरण का रूप हो जाता है-

$$g^{\alpha+\beta}(T) = \frac{\Gamma_P(\alpha+\beta)\ \Gamma_P(-\eta)\ \Gamma_P(\alpha-\gamma)}{\Gamma_P(\alpha)\ \Gamma_P(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma_P(-\gamma-\eta)\ \Gamma_P(\gamma)}$$

$$\times \int_{U>0} {}_2F_1\ (\alpha+\beta, -\eta\ ;\ \alpha\ ;\ -T^{-1/2}\ UT^{-1/2})\ |U|^{\gamma-\frac{(P+1)}{2}}\ dU$$

स्थिर T के लिए $U = T^{1/2}\ Z\,T^{1/2} \Rightarrow dU = |T|^{(p+1)/2}\ dZ, |U| = |T|\ |Z|$ तथा मथाई-सक्सेना[9] के फलस्वरूप

$$g^{\alpha+\beta}(T) = |T|^{\gamma}$$

इस तरह (2.6) से प्रदर्शित समाकल समीकरण (2.1) के हल की पुष्टि हो जाती है।

विशिष्ट दशाएँ

(i) यदि हम (2.1) में $\beta = 0$ लें तो

$$\Gamma_P(\alpha)\,\Gamma_P(-\eta)\,L_U^{-1}\,[\,|Z|^{(p+1)/2+\eta}(|X|^{\eta}\ g^{\alpha}(T))\,] = f(U)$$

से

$$g^{\alpha}(T) = |T|^{-\eta}/\Gamma_P(\alpha)\int_{U>0}|T+U|^{\eta}\ f(U)\ dU$$

का व्युत्क्रम प्राप्त होता है।

(ii) यदि (2.1) में $\alpha = -\eta$ लें तो

$$\Gamma_P\ (\beta-\eta)\ \Gamma_P(-\eta)\ L_U^{-1}\ [|X|^{-\beta-\eta+(p+1)/2}\ L_X(T|^{\eta-\beta}\ g^{\beta-\eta}\ (T))\,] = f(U)$$

से

$$g^{\beta-\eta}(T) = \frac{|T|^{\beta-\eta}}{\Gamma_p(-\eta)}\int_{U>0}|T - U|^{\eta-\beta}\ f(U)\,dU$$

का व्युत्क्रम प्राप्त होता है।

(iii) यदि (2.1) में $-\eta = \alpha$, $\beta = 0$ लें तो

$$\Gamma_P^2(\alpha)\ L_U^{-1}\ [|Z|^{(P+1)/2-\alpha}\ L_Z^{-1}\ (|T|^{-\alpha}\ g^{\alpha}(T))] = f(U) \quad \text{से}$$

$$g^{\alpha}(T) = |T|^{\alpha}/\Gamma_P(\alpha) \int_{U>0} |T|\,U|^{-\alpha} f(U)\, f(U)\ dU$$

का व्युत्क्रम प्राप्त होता है और यदि हम

$$\Gamma_P(\alpha)\ |T|^{-\alpha}\ g^{\alpha}\ (T) = k^{\alpha}(T)$$

पर विचार करें तो

$$\Gamma_P(\alpha)\ L_U^{-1}\ [|X|^{(P+1)/2-\alpha}\ L_X^{-1}\ (k^{\alpha}(T))] = f(U)$$

से $$k^{\alpha}(T) = \int_{U>0} |T+U|^{-\alpha} f(U)\ dU$$

का व्युत्क्रम प्राप्त होता है।

यदि हम क्रम 1×1 का मैट्रिक्स लें यानी $p = 1$ तो हमें

$$\Gamma(\alpha)\ L_U^{-1}\ [|X|^{(p+1)/2-\alpha}\ L_x^{-1}\ (k^{\alpha}\ (t))] = f(u)$$

प्राप्त होता है जो

$$k^{\alpha}(t) = \int_0^{\infty} (u+t)^{-\alpha} f(u)\ du$$

का व्युत्क्रम देता है जो सार्वीकृत स्टाइल्जे रूपान्तर[3] है।

(iv) यदि (2.1) में $\beta = \gamma + \eta$, $\alpha = -\eta$ लें तो

$$\Gamma_P\ (\gamma\ \Gamma_P(-\eta)\ L_U^{-1}\ [|X|^{(p+1)/2-\gamma}\ L_x^{-1}\ (|T|^{-\gamma}\ g^{\gamma}(T))] = f\ (U) \quad \text{से}$$

$$g^{\gamma}(T) = \frac{|T|^{\gamma}}{\Gamma(-\eta)} \int_{U>0} |T+U|^{-\gamma} f(U)\, dU$$

का व्युत्क्रम प्राप्त होता है।

निर्देश

1. कांस्टैन्टीन, ए. टी. : Ann. Math. Statist, 1963, 34, 1270-1285.

2. कांस्टैन्टीन, ए. टी. : Ann. Math. Statist, 1966, 37, 215-225.

3. देवाल, डी. जे. : Ann. Math. Statist, 1970, 41, 1091-1093.

4. देवाल, डी. जे. : Ann. Math. Statist, 1972, 43, 344-347.

5. एर्डेल्यी, ए. इत्यादि: Tables of Integral Tranforms, Vol II, McGraw Hill, New York (1954).

6. फुजी कोशी, वाई. : J. Multivariate Anal., 1972, 2, 208-218.

7. जेम्स,ए. टी. : Ann. Math. Statist, 1964, 35, 475-501.

8. जेम्स,ए. टी. : Multivariate Anal III (Proc. Ist Internat Symp., Krisnaiah, ed.), 157-169 [1973].

9. मथाई, ए. एम. तथा सक्सेना, आर. के. : The H-functions with Applications in Statistics and other Disciplines, John Wiley & Sons, New York (1978).

10. मथाई, ए. एम. : A Hand book of Gereralized Special Function for Statistical and Physical Science, Oxford University Press, Oxford (1993).

सारणी

(विचार किये गये सारे मैट्रिक्स वास्तविक, धनात्मक, निश्चित तथा संमित और p × p क्रम के हैं)

क्रमांक	$g^{\alpha+\beta}(T) = 1/T_p(\alpha) \int_{U>0} {}_2F_1(\alpha+\beta, -\eta, \alpha, -T^{-1/2} U T^{-1/2}) f(U)\, dU$, $R(\alpha+\beta, -\eta, \alpha) > (p-1)/2$	$f(U) = \Gamma_p(\alpha+\beta)\Gamma_p(-\eta)\ L_u^{-1}\ [\lvert Z\rvert^{(p+1)/2+\eta} L_z^{-1} (\lvert Y\rvert^{\alpha+\eta} L_Y \lvert X\rvert^{-\beta} L_x^{-1} (\lvert T\rvert^{-\alpha-\beta} g\alpha+\beta(T)))]$
(i)	$g^{\alpha+\beta}(T)$; $R(\alpha+\beta, -\eta, \alpha) > (p-1)/2$	$f(U)$
(ii)	$\lvert T\rvert^{\gamma}$; $R(\alpha+\beta, \alpha+\beta-\gamma, -\eta) > (p-1)/2$	$\dfrac{\Gamma_p(\alpha-\gamma)\Gamma_\rho(\alpha+\beta)\Gamma_p(-\eta)}{\Gamma_p(\gamma)\Gamma_\rho(\delta+\alpha-\beta-\gamma)\Gamma_p(-\gamma-\eta)} \lvert U\rvert^{\gamma-(p+1)/2}$
(iii)	$\lvert T\rvert^{-\delta+\alpha+\beta}$, $R(\delta, -\eta, \alpha+\beta) > (p-1) > 2$	$\dfrac{\Gamma_p(\delta-\beta)\Gamma_\rho(\eta)\Gamma_p(\alpha+\beta)}{\Gamma_p(\delta)\Gamma_\rho(\delta-\alpha-\beta-\eta)\Gamma_p(\alpha+\beta-\delta)} \lvert U\rvert^{\alpha+\beta-\delta-(p+1)/2}$
(iv)	$\lvert T\rvert^{(p+1)/2+\alpha+\beta}$ $R(\alpha+\beta, -\eta) > p$	$\dfrac{\Gamma_p\left(\frac{p+1}{2}-\beta\right)\Gamma_p(-\eta)\Gamma_p(\alpha-\beta)}{\Gamma_p\left(\frac{p+1}{2}\right)\Gamma_p\left(\frac{p+1}{2}-\alpha-\eta\right)\Gamma_p\left(\alpha+\beta-\frac{(p+1)}{2}\right)} \lvert U\rvert^{\alpha+\beta-(p+1)}$
(v)	$\lvert T\rvert^{\gamma} C_k(T)$; $R(\alpha+\beta, \gamma, -\eta) > (p-1)/2$	$\dfrac{\Gamma_p(\alpha-\gamma, k)\Gamma_p(\alpha+\beta)\Gamma_p(-\eta)}{\Gamma_p(\gamma, k)\Gamma_p(\alpha+\beta-\gamma, k)\Gamma_p(-\eta-\gamma, k)} \lvert U\rvert^{\gamma-(p+1)/2} C_k(U)$

क्रमांक (v)	$g^{\alpha+\beta}(T) = 1/T_p(\alpha) \int_{U>0} {}_2F_1\ (\alpha+\beta, -\eta, \alpha, -T^{-1/2}$ $U T^{-1/2}) f(U)\, dU$, $R(\alpha+\beta, -\eta, \alpha) > (p-1)/2$	$f(U) = \Gamma_p(\alpha+\beta)\Gamma_p(-\eta)\ \ L_u^{-1}\ [\lvert Z\rvert^{(p+1)/2+\eta}\ L_z^{-1}(\lvert Y\rvert^{\alpha+\eta}\ L_Y \lvert X\rvert^{-\beta}$ $L_x^{-1}\ (\lvert T\rvert^{-\alpha-\beta}\ g\,\alpha+\beta\}\ (T)\,)\,\})]$
(vi)	$\lvert T\rvert^{\gamma}\ C_k(A^{1/2}\ UA^{1/2})$, $R(\alpha+\beta, \gamma, -\eta) > (p-1)/2$	$\frac{\Gamma_p\ (\alpha-\gamma,\ k)\ \Gamma_p(\alpha+\beta)\Gamma_p\ (-\eta)}{\Gamma_p\ (\gamma,\ k)\ \Gamma_p(\alpha+'\beta-\gamma,\ k)\ \Gamma_p\ (-\eta-\gamma, k)} \lvert U\rvert^{\gamma-(p+1)/2}$ $C_k(A^{1/2}\ U A^{1/2})$
(vii)	$\lvert T\rvert^{-\delta+\alpha+\beta}\ C_k(T)$; $R(\delta, -\eta,\ \alpha+\beta), > (p-1)/2$	$\frac{\Gamma_p\ (\delta-\beta,\ k)\ \Gamma_p(\alpha+\beta)\ \Gamma_p\ (-\eta)}{\Gamma_p\ (\delta,\ k)\ \Gamma_p(\delta-'\beta-\alpha-\ \eta,\ k)\ \Gamma_p\ (\alpha+\beta-\delta)}$ $\lvert U\rvert^{\alpha+\beta-\delta-(p+1)/2}\ \ C_k(U)$
(viii)	$\lvert T-A\rvert^{-\delta+\alpha+\beta}$, $R(\delta, -\eta,\ \alpha+\beta), > (p-1)/2, T>A$	$\frac{\Gamma_p\ (\alpha+\beta)\ \Gamma_p(\delta-\beta)\ \Gamma_p\ (-\eta)}{\Gamma_p\ (\delta)\ \Gamma_p(\delta-'\ \beta-\alpha-\ \eta)\ \Gamma_p\ (\alpha+\beta-\delta,\ k)} \lvert U+A\rvert^{\alpha+\beta-\delta-(p+1)/2}$
(ix)	$\lvert T-A\rvert^{\gamma}$, $R(\alpha+\beta, \alpha+\beta-\gamma,\ \eta) > (p-1)/2, /2,\ T > A$	$\frac{\Gamma_p\ (\alpha-\gamma)\ \Gamma_p(\alpha+\beta)\ \Gamma_p\ (-\eta)}{\Gamma_p\ (\gamma)\ \Gamma_p(\alpha+'\ \beta-\gamma)\ \Gamma_p\ (-\eta-\gamma}\ \ \lvert U+A\rvert^{\gamma-(p+1)/2}$
(x)	$\lvert T-A\rvert^{-(p+1)/2+\alpha+\beta}$, $R(\alpha+\beta,\ -\eta > p,\ T > A$	$\frac{\Gamma_p\,[\,(P+1)/2-\beta]\ \Gamma_p(\alpha+\beta)\ \Gamma_p\ (-\eta)}{\Gamma_p\ [(P+1)/2]\Gamma_p(p+'\ 1)/2-\alpha-\beta-\eta]\ \Gamma_p\ (\alpha+\beta-(p+1)/2]}$ $\lvert U+A\rvert^{\{}\alpha+\beta-(p+1)$

इस सारणी के तैयार करने में फलनों की परिभाषाओं तथा समाकलों के लिए पाठक मथाई तथा सक्सेना[9] एवं मथाई[10] को देखें।

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) एक सौ रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य
वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 20 पौंड या 50 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 6 पौंड या 10 डालर

Rates
Annual Rs. 100 or £ 20 or $ 50
Per Vol. Rs. 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर्स
7 बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405

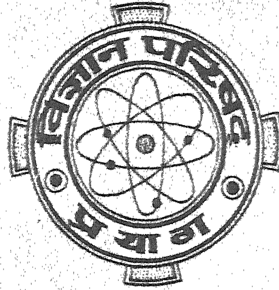
ISS.. : 0505 5806

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

Vol. 43 October 2000 No.4



कौंसिल ऑफ साइंस एण्ड टेक्नलॉजी, उत्तर प्रदेश तथा कौंसिल ऑफ साइंटिफिक एण्ड इण्डस्ट्रियल रिसर्च, नई दिल्ली के आर्थिक अनुदान द्वारा प्रकाशित

विज्ञान परिषद् प्रयाग

विषय-सूची

Vol. 43 October 2000 No.4

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 4, October 2000.

नैनोटेक्नॉलॉजी विकास में कार्बन नैनोसंरचनाएँ

शमीम अहमद
सेन्ट्रल इलेक्ट्रॉनिक्स इंजीनियरिंग रिसर्च इन्स्टीट्यूट, पिलानी (राजस्थान)

[प्राप्त — जुलाई 17, 2000]

सारांश

परमाणुओं एवं अणुओं की सहायता से अतिसूक्ष्म मशीन निर्माण के संदर्भ में कार्बन नैनोसंरचनाओं की एक महत्वपूर्ण भूमिका उभर कर सामने आ रही है। जीव-वैज्ञानिक अनुंसन्धानों पर आधारित 'नैनोबॉट' की कल्पना को मूर्त रूप देने में फुलरीन एवं कार्बन नैनोनलिकाओं से अनेक प्रकार की अपेक्षाएं की जा रही हैं। उदाहरण के लिए 'नैनोबॉट' के मस्तिष्क निर्माण में नैनोनलिका द्वारा निर्मित 'नैनोचिप' एक और विकल्प हो सकती है। फुलरीन आधारित स्विच-परिपथ द्वारा इस प्रकार की 'नैनोचिप' के निर्माण की सफलता अब ज्यादा दूर नहीं। कार्बन नैनोनलिका को 'नैनोबॉट' के हाथ की उँगलियों के स्थान पर परमाणुओं एवं अणुओं को पहचान कर एक स्थान से दूसरे स्थान पर ले जाने में इस्तेमाल किया जाना इस दिशा में दूसरी संभावना है। इसके अतिरिक्त सामान्य परिस्थितियों में भी कार्बन नैनोसंरचनाओं के अनेक लाभदायक अनुप्रयोग बहुत तेजी से खोजे जा रहे हैं। कार्बन नैनोसंरचनाओं में फुलरीन तथा कार्बन नैनोनलिकाओं का स्थान निर्वाध रूप से सर्वोच्च है। इनके गुणधर्म एवं निर्माण विधियों का संक्षिप्त वर्णन इस लेख में प्रस्तुत किया गया है। इनके अतिसूक्ष्म आकार के कारण इनके निर्माण तथा परीक्षणों में आने वाली कठिनाइयों तथा इस दिशा में किये गए शोध परीक्षणों का संक्षिप्त उल्लेख किया गया है।

Abstract

Carbon nanostructures in the development of nano-technology. *By* S. Ahmad, Central Electronics Engineering Research Institute, Pilani. (Raj.)

The important role of carbon nanostructures has been appearing on the horizon in connection with the realization of micromachines using

atoms and molecules. To give concrete shape to the concept of 'Nanobot', derived from recent progress made in the field of life science, there are numerous expectations from fullerenes and carbon nanotubes. For example, a nanochip realized using nanotubes may be conceived for the brain of a 'Nanobot'. Nanochip circuits based on switching observed in fullerene is not far from reality. Carbon nanotubes used as fingers of 'Nanobot' to transfer atoms and molecules from one place to other after identifying them, is another possibility in this context. Besides, many useful applications are being searched for these structures under normal conditions. Fullerene and carbon nanotubes have highest position in the family of carbon nanostructures. Properties and method of preparation of these nanostructures are described in brief in this paper. Because of extremely small size of these structures, the difficulties experienced in fabrication, characterisation and the experimental results obtained therein are briefly described here.

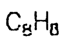
1. विषय परिचय

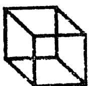
आज से लगभग चार दशक पहले विश्वविख्यात वैज्ञानिक रिचर्ड फाइनमैन ने एक भाषण में कहा था कि एक दिन आएगा जब कुछ हजार परमाणुओं की सहायता से अतिसूक्ष्म मशीनों का निर्माण संभव हो पाएगा। इस कथन को यदि आज के रसायन एवं जीव-विज्ञान से प्राप्त ज्ञान के आधार पर देखा जाए तो सब कुछ संभव सा प्रतीत होता है। परमाणु समूह से अणुओं का सृजन तथा अणुओं के विशिष्ट विन्यास से जटिलतम संरचनाओं का निर्माण एक कोरी कल्पना से निकल कर एक सत्य में परिवर्तित हो रहे हैं। विज्ञान की इस विधा को जिसमें परमाणुओं एवं अणुओं की सहायता से अनेक प्रकार की अतिसूक्ष्म मशीनी संरचनों के निर्माण की दिशा में कार्य हो रहा है, हम नैनोटेक्नॉलॉजी के नाम से जानते हैं। जीव विज्ञान सम्बन्धी शोधों से अब तक यह निश्चित हो चुका है कि जीव कोशिकाएं (लिविंग सेल्स) न केवल एन्जाइम एवं प्रोटीन जैसी संरचनाओं का निर्माण करते हुए ईंधन को ऊर्जा में बदलती हैं अपितु इसके साथ-साथ डीएनए में स्थित कोड के अनुसार इनको एक स्थान से दूसरे स्थान तक आवश्यकतानुसार पंप करके भेजती भी हैं। आज अनेक प्रजातियों से प्राप्त डीएनए को आपस में मिलाकर ऐसी नई बैक्टीरिया कोशिका का निर्माण हो चुका है जो औषधोपयोगी हार्मोन का पम्पन करने में सक्षम है। नैनोटेक्नॉलॉजी के माहिरों की परिकल्पनाएं जीव विज्ञान की सीमाओं से भी कहीं और दूर तक पहुँचने का प्रयास कर रही हैं। उदाहरण के लिए, यह सोचा जा रहा है - क्या एक-एक कार्बन परमाणु को उचित आबन्ध के साथ जोड़कर हीरे का निर्माण किया जा सकता है अथवा रक्त के अन्दर एक समुचित नैनोयुक्ति को डालकर कोलेस्ट्रॉल के परमाणुओं को ढूंढकर एक-एक को समाप्त किया जा सकता है। जिस दिन ऐसी संभावनाएं परीक्षणात्मक तथ्य में परिवर्तित हो जाएंगी, मानव जीवन कितना सुखद हो जाएगा इसकी कल्पना करना शायद अभी मुश्किल हो।

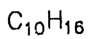
परमाणुओं एवं अणुओं के समुचित विन्यास से किसी जटिल नैनोसंरचना निर्माण को संभव बनाने के लिए सबसे पहले एक ऐसी नैनोयुक्ति की आवश्यकता होगी जिसकी मदद से उचित परमाणुओं एवं अणुओं को पहचान कर, एक-एक को लेकर उचित स्थान पर रखकर तथा उनको आपस में आबन्धित किया जा सके। परमाणुओं का आकार अत्यन्त सूक्ष्म होने के कारण इस युक्ति का आकार भी यथावत् छोटा एवं हेर-फेर करने में अत्यन्त सरल होना चाहिए। इस दिशा में किए गए प्रयासों में आज सबसे सफल विधि स्कैनिंग टनेलिंग तथा एटॉमिक फोर्स माइक्रोस्कोपी पर आधारित है। इन विधियों में खोजी शलाका (प्रोब) की नोक पर उचित विभव लगाकर एक-एक परमाणु को स्थानान्तरित किया जा चुका है। अन्ततः पूर्ण सफलता के लिए एक 'नैनोबॉट' (नैनो आकार के रोबॉट) जैसी संरचना का विकास इस निर्माण कार्य के लिए आवश्यक होगा। इन 'नैनोबॉट' के मस्तिष्क एवं तत्सम्बन्धित क्रियाकलाप नियन्त्रण के साथ कुछ और अतिरिक्त विशेषताएं भी वांछनीय होंगी। इन 'नैनोबॉटों' में एक अतिरिक्त क्षमता यह होनी चाहिए कि इनकी सहायता से अनेक और 'नैनोबॉट' का निर्माण हो सके। उदाहरण के लिए यदि यह मान लिया जाए कि एक 'नैनोबॉट' एक समय में दो 'नैनोबॉट' का निर्माण करे तो बहुत कम समय में असंख्य 'नैनोबॉट' तैयार हो जाएंगे। ऐसी दशा में अरबों-खबरों की संख्या में 'नैनोबॉट' मिलकर शायद एक स्कूटर निर्माण में पूरी तरह सफल हो सकें-ऐसी आशा की जाती है। इसके साथ-साथ 'नैनोबॉट' की स्वयं-निर्माण प्रक्रिया को नित्रण में रखना भी आवश्यक होगा। इसके अभाव में अनियन्त्रित 'नैनोबॉट' निर्माण से प्रलयकारी विनाश की अवस्था उत्पन्न हो जाएगी। इस प्रक्रिया को क्रियान्वित करने के लिए समुचित प्रावधान जैसे स्वयं-निर्माण उस समय अपने आप रुक जाए जब निर्माण करने वाले 'नैनोबॉट' के आस-पास एक खास संख्या से ज्यादा निर्मित 'नैनोबॉट' हो जाएं। इसके अतिरिक्त 'नैनोबॉट' में कुछ इस प्रकार की प्रकृति निर्मित की जा सकती है कि उनका स्वयं-निर्माण कार्य एक विशेष परिस्थिति में ही आरंभ हो सके और जब ऐसी स्थिति न रहे तो स्वयं-निर्माण कार्य अपने आप रुक जाए। जीव विज्ञान अध्ययन से इस प्रकार की अनेक संभावनाएँ प्रचुर मात्रा में मिली हैं जिनका उपयोग नैनोमशीनों के निर्माण में किया जा सकता है।

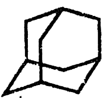
'नैनोबॉट' के मस्तिष्क के लिए चिरपरिचित 'चिप' से काम नहीं चल पाएगा। 'नैनोबॉट' के आकार के अनुसार अतिसूक्ष्म एवं बृहद् क्षमता वाली 'चिप' के लिए समुचित साधन की आवश्यकता होगी। इस संदर्भ में डीएनए, अणु या क्वाण्टम बिन्दु आधारित क्वाण्टम 'चिप' शायद उचित विकल्प हो सकते हैं।

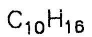
नैनोटेक्नॉलॉजी की परमाणु एकक आधारित निर्माण विधि को काम में लाने की दिशा में उचित परमाणु के चयन के समय हमारा ध्यान अपने आप कार्बन परमाणु की ओर आकर्षित होता है। कार्बन परमाणु तीन प्रकार - एसपी- 1, एसपी- 2 तथा एसपी -3, के आबन्धों द्वारा एक दूसरे से जुड़ सकते हैं। इस विशेषता के कारण कार्बन परमाणुओं द्वारा एक आयामी शृंखलात्मक, द्विआयामी हार तथा तृआयामी खोल या पिंजर जैसी संरचनाओं का निर्माण सरलता से किया जा सकता है। कार्बन परमाणुओं द्वारा संश्लेषित यौगिकों के अध्ययन द्वारा कार्बनिक रसायन विज्ञान का बृहद् विस्तार किया गया है। इसके साथ-साथ अकार्बनिक रसायन में ग्रेफाइट और हीरा जैसी संरचनाओं

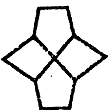


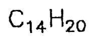

क्युबेन

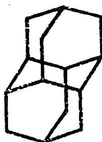


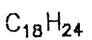

अडामण्टेन

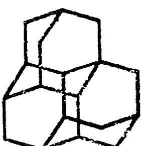


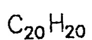

ट्विस्टेन

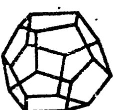


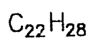

डाईअमण्टेन

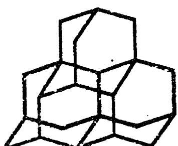


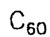

ट्राईअमण्टेन

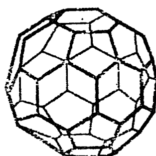



डोडेकाहिड्रेन




टेट्रामण्टेन



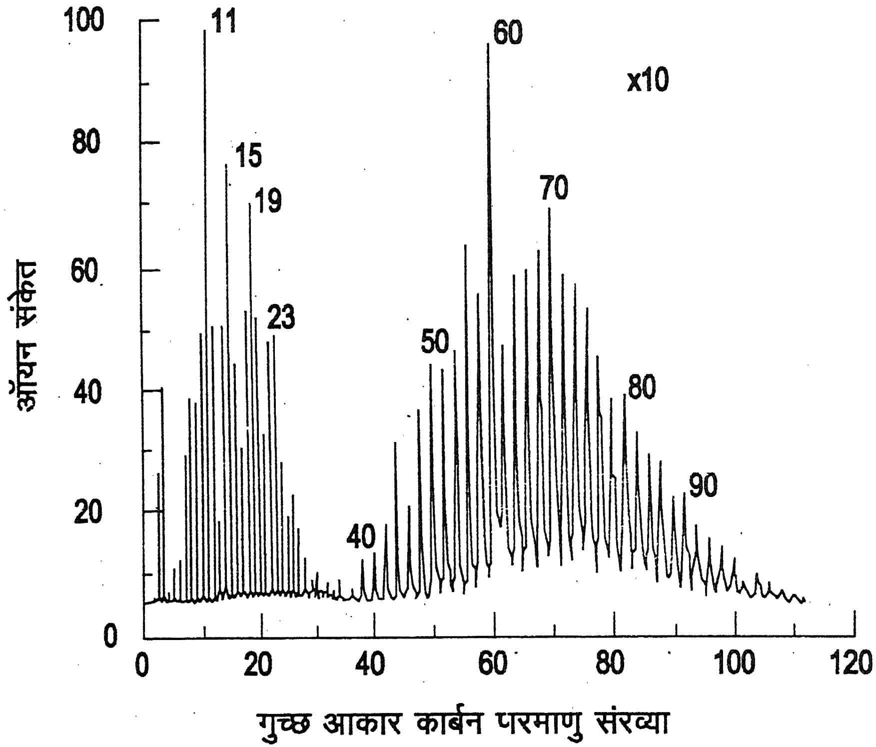

फुलरीन

चित्र 1 कार्बनिक रसायन संश्लेषित पिंजर संरचना आधारित यौगिक

के अध्ययन से पता चला कि इनका निर्माण कार्बन परमाणुओं के एसपी -2 तथा एसपी -3 आबन्धों से होता है। कुछ संरचनाओं में परमाणु विन्यास के कारण दो प्रकार के आबन्धों का मिश्रण भी हो सकता है जिसके कारण अतिरिक्त विशेषताएं उत्पन्न हो जाती हैं। एसपी-2 एवं एसपी-3 आबन्धों के मिश्रण पर आधारित फुलरीन तथा कार्बन नैनोनलिका जैसी पिंजर आकृति वाली संरचनाओं के विषय में अनुसंधान कार्य चल रहा है। इन संरचनाओं के लिए उच्च तापीय निर्माण विधियों के अतिरिक्त कार्बनिक रसायन में भी ग्राफीन आधारित अणु संश्लेषण में काफी सफलता मिली है। जैसा चित्र 1 में दिखाया गया है, पिंजर आकृति 'अडामन्टेन' अणु को, जिसमें 10 कार्बन परमाणु 16 हाइड्रोजन परमाणुओं के साथ जुड़े होते हैं, पहली बार सन् 1933 में लाण्डा नामक वैज्ञानिक ने पेट्रोलियम से निकाला था। इस अणु की संरचना ऐसी है कि इसके पुनरावर्तन से हीरा जालक का निर्माण होता है। इस खोज के पश्चात् एल्यूमीनियम क्लोराइड उत्प्रेरक की उपस्थिति में श्लायर पद्धति से इसकी संश्लेषण प्रक्रिया और सरल हो गई। 'अडामन्टेन' एकक की सहायता से संश्लेषित 'डाईअमण्टेन', 'ट्रायामण्टेन' तथा 'टेट्राअण्टेन' में क्रमशः 2, 3 तथा 4 एकक भाग लेते हैं। इसी प्रकार चित्र 1 में दिखाया गया 'ट्विस्टेन' अणु 'अडामण्टेन' की समावयवी (आइसोमर) संरचना है। 'क्यूबेन' से लेकर 'डोडेकाहिड्रेन' तक की सरंचनाएं घनाकार 'क्यूबेन' से संश्लेषित की जा सकती हैं। इन अणुओं के संश्लेषण में श्लायर की खोजों से काफी प्रगति हुई है। यदि श्लायर पद्धति को उचित रूप से विकसित किया जाए तो संभव है कार्वनीय रसायन विधि से फुलरीन तथा तत्सम्बन्धित यौगिकों का अभाव खत्म हो जाएगा और इनकी कीमत भी कम हो पाएगी।

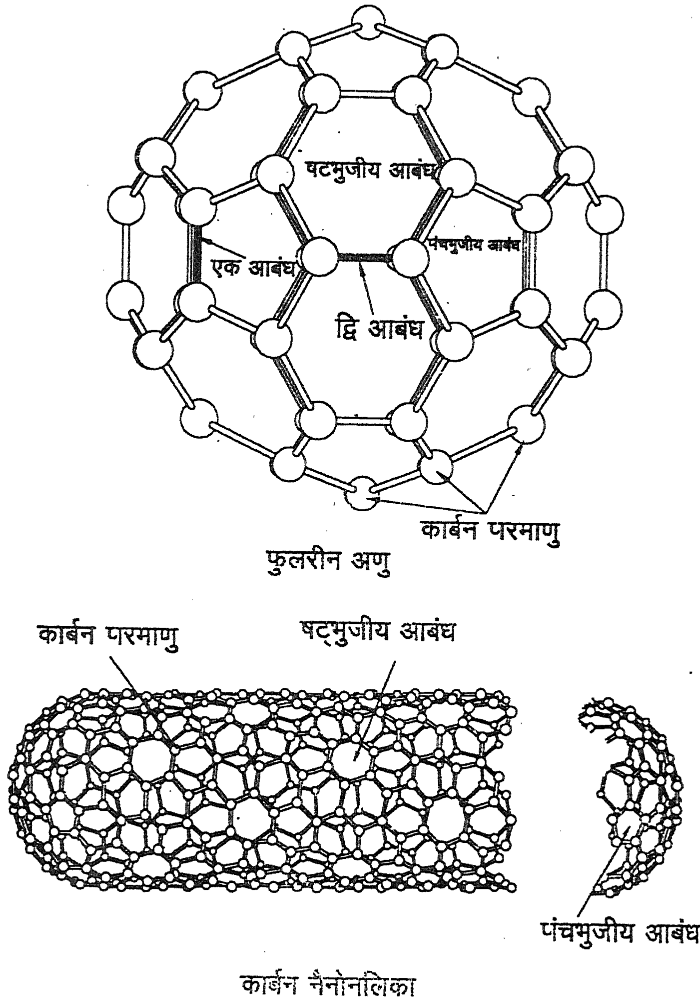
2. फुलरीन एवं कार्बन नैनोनलिकाएं

फुलरीन एवं कार्बन नैनोनलिकाएं कार्बन परमाणुओं द्वारा निर्मित शून्य और एक आयामी संरचनाएं हैं जिनमें अनेक विशिष्ट गुणधर्म निहित हैं। फुलरीन अणु में कार्बन परमाणु षटकोणीय और पंचकोणीय आबन्धों द्वारा एक पिंजर जैसी आकृति बनाते हैं। आयलर ज्यामितिय सिद्धान्त से यह विदित है कि अगर एक विशिष्ट क्रम में षटभुजीय एवं पंचभुजीय आकृतियों को एक दूसरे से मिला कर रखा जाय तो इससे फुटवाल खोल जैसी संरचना बनाई जा सकती है। यदि इन पंचभुजीय और षटभुजीय एककों की संख्या का अनुपात वदल दिया जाय तो इनसे बनने वाली आकृति भी बदल जाती है। इस एक परतीय संरचना का यांत्रिक स्थायित्व इसमें लगे षटभुज-पंचभुज आवन्ध संयोजन में निहित ऊर्जा का मात्रा से तय होता है। किसी फुलरीन अणु को ठीक वीच से काटने से प्राप्त दो हिस्सों को यदि एक उचित आकार के षटभुजीय कार्वन परमाणु आवन्धों से निर्मित बिना जोड़ के बेलनाकार खोल से जोड़ दिया जाए तो इससे कार्वन नैनोनलिका आकृति वन जाती है। फुलरीन का व्यास लगभग एक नैनोमीटर होता है। इसी प्रकार नैनोनलिका का व्यास भी एक नैनोमीटर के आसपास होता है। परन्तु इनकी लम्बाई एक माइक्रोमीटर से लेकर 100 माइक्रोमीटर तक हो सकती है। फुलरीन अणु की कार्बन संरचना ऐसी होती है कि इसके आकार को दबाव द्वारा बदलना लगभग असंभव है। कार्बन नैनोनलिका एक कठोरतम संरचना के रूप में विदित है। नैनोनलिकाओं की इस विशेषता को अनेक प्रकार से उपयोग में लाने का प्रयास किया जा रहा है।



चित्र 2 ग्रेफाइट सब्सट्रेट के लेसर वाष्पन से प्राप्त कार्बन गुच्छ का मास स्पेक्ट्रा

कार्बन नैनोसंरचनाओं का निर्माण कई प्रकार की विधियों द्वारा किया गया है। सर्वप्रथम ग्रेफ़ाइट के ऊपर लेसर बीम से उत्पन्न उच्च तापवातावरण में फुलरीन अणुओं की उपस्थिति को स्पेक्ट्रॉस्कोपीय विधि द्वारा पुष्ट किया गया। इसके अतिरिक्त चाप विसर्जन, रसायनिक वाष्प निक्षेपण एवं अनेक मिश्र विधियों द्वारा भी कार्बन नैनोसंरचनाओं का निर्माण किया गया। सन् 1982 में क्रोतो नामक वैज्ञानिक ने लाल दानव (रेड जायण्ट) नामक कार्बन तारे से निकलने वाले कार्बन गुच्छों (क्लस्टर्स) के स्पेक्ट्रॉस्कोपीय विश्लेषण से कार्बन के विभिन्न संख्या वाले परमाणु-समूहों की खोज की। बाद में क्रोतो एवं स्माली ने साथ-साथ प्रयोगशाला में इन कार्बन परमाणु-समूहों का पहली बार पुष्टीकरण लेसर आधारित परीक्षण से प्राप्त परिणामों द्वारा किया। इन परीक्षणों से यह निश्चित हो गया कि कार्बन के कुछ विशिष्ट संख्या वाले परमाणु-समूह ही इस प्रकार के वातावरण में पाए जाते हैं। क्रोतो एवं स्माली परीक्षण से प्राप्त मास-स्पेक्ट्रोग्राफ से, जोकि चित्र 2 में दिया गया है, यह साफ़ हो जाता है कि इन परमाणु गुच्छों में दो प्रकार के समूह हैं। निचले गुच्छों में 11, 15, 19 और 23 परमाणु वाले समूह हैं। 30 से ज़्यादा परमाणुओं वाले बड़े समूहों



चित्र 3 फुलरीन एवं कार्बन नैनोनलिका संरचना

में 60, 70, 80 और 90 परमाणु वाले गुच्छ अत्यन्त स्पष्ट रूप में दिखते हैं। अन्य परीक्षणों से यह भी पता चला कि 30 से कम संख्या वाले परमाणु गुच्छों में आवन्ध एक तथा द्विआयामी होते हैं और इन्हें चेन संरचना कहते हैं। 30 से ज़्यादा संख्या वाले गुच्छों में परमाणु आबंध एक पिंजर की शक्ल को होते हैं। इसका सत्यापन पहली बार नाभिकीय चुम्बकीय अनुनाद (न्युक्लियर मैग्नेटिक रेज़ोनेन्स) परीक्षण से किया गया। तत्पश्चात् इन्फ्रारेड स्पेक्ट्रॉस्कोपी द्वारा भी इस पिंजर रचना की पुष्टि की गयी। इन परीक्षणों से निर्विवाद रूप से स्पष्ट हो गया कि 60 या इससे ज़्यादा कार्बन परमाणुओं वाले गुच्छ की संरचना पिंजर स्वरूप होती है। फुलरीन एवं एक परतीय कार्बन संरचना चित्र 3 में दी गई है।

फुलरीन अणुओं की परीक्षण पुष्टि से पहले भी अनेक अध्ययनों से इस प्रकार की अणु संरचना के स्थायी होने के संकेत मिलते रहे हैं। रूसी वैज्ञानिकों ने तो यहाँ तक कहा कि इस प्रकार की अणु संरचना में एक अचालक के गुण होंगे जिसके ऊर्जा अन्तराल के ऊपर नीचे चालन एवं वैलेंस बैंड होंगे। त्रुटि मादन से इन अणुओं की वैद्युतीय चालकता को यथावत् प्रभावित किया जा सकता है। आज भी फुलरीन एवं कार्बन नैनोलनिकाओं के अनेक गुणधर्मों को इलेक्ट्रॉनिक एवं फोनॉनीय परिकलनों द्वारा मालूम करने का प्रयास जारी है। इन परिकलित परिणामों द्वारा इंगित दिशा में समुचित परीक्षण करने पर अनेक धारणाओं की पुष्टि हुई है।

सी-60 अणु को 'आर० बकमिनिस्टर फुलर' के सम्मान में उनके नाम पर फुलरीन कहा गया। कुछ लोगों ने न परमाणुओं को 'बकीबाल' भी नाम दिया। फुलर द्वारा अभिकल्पित एक गुम्बद की शक्ल सी-60 अणु से मिलती है इसलिए फुलरीन नाम इन अणुओं के लिए ज़्यादा प्रचलित हुआ। यद्यपि आज 60 या इससे अधिक संख्यावाले पिंजर स्वरूप सारे अणुओं को फुलरीन के नाम से जाना जाता है पर साधारणतः 60 कार्बन परमाणु वाले अणु सी-60 के पर्याय के रूप में फुलरीन शब्द इस्तेमाल होता है।

3. फुलरीन के गुणधर्म

ठोसावस्था फुलरीन में एक अचालक के गुण होते हैं तथा इसको अनेक प्रकार के त्रुटि परमाणुओं द्वारा मादित किया जा सकता है। इस वजह से इसकी चालकता को काफी हद तक बदला जा सकता है। इन अणुओं में त्रुटि मादन तीन प्रकार से संभव है। एक विधि में सी-60 पिंजर के अन्दर त्रुटि परमाणु को समावेशित कर देते हैं। दूसरी विधि में पिंजर सतह पर कार्बन परमाणुओं को त्रुटि परमाणुओं से स्थानान्तरित करके संरचना में परिवर्तन लाया जाता है। तीसरी विधि में क्रिस्टलीय ठोस संरचना में अणुओं के बीच के रिक्त स्थान पर परमाणु को स्थिर किया जाता है। इस प्रकार की मादन क्रियाओं में कभी-कभी एक या ज़्यादा इलेक्ट्रॉन त्रुटि परमाणु से निकल कर पिंजर पर स्थित कार्बन परमाणुओं पर स्थानान्तरित हो जाते हैं। उदाहरण के लिए यदि लैन्थनम परमाणु द्वारा सी-60 को मादित किया जाए तो इससे 3 इलेक्ट्रॉन निकल कर पिंजर पर स्थित कार्बन परमाणुओं पर चले जाते हैं जिसके फलस्वरूप सी-60 एक ध्रुवीय अणु में परिवर्तित हो जाता है। इसके अतिरिक्त अगर पिंजर के ऊपर से कुछ परमाणुओं को किसी प्रकार निकाल लिया जाए तो पिंजर का आकार छोटा भी किया सकता है। मादित सी-60 में यदि इलेक्टॉन स्थानान्तरण नहीं होता है तो इससे उत्पन्न यौगिकों को 'कैल्थरेट' कहते हैं। इलेक्ट्रॉन स्थानान्तरण प्रक्रिया में यदि दो अणुओं के बीच उचित तरंग फलन अतिव्याप्ति (वेव फक्शन ओवरलैप) की स्थिति हो तो 'फुदकीय चालन' (हॉपिंग कण्डक्शन) संभव हो जाता है। यद्यपि पिंजर पर स्थित कार्बन परमाणुओं को हटाकर ग्राही (ऐक्सेप्टर) परमाणु को बिठाना एक कठिन कार्य है पर एकाध परीक्षणों में दो कार्बन परमाणुओं के स्थान पर एक बोरॉन परामाणु द्वारा स्थानान्तरण में सफलता मिली है। अन्तर्निवेशन (इन्टरकैलेशन) प्रक्रिया में लीथियम, सोडियम, पोटैशियम, रूबीडियम एवं सीजियम परमाणुओं को 100-200° से० पर सी-60 क्रिस्टल में समावेश किया जा चुका है। कैल्सियम, बेरियम और स्ट्रांशियम जैसे

त्रुटि परमाणुओं के अन्तर्निवेशन में अधिक ताप की आवश्यकता होती है। मादित फुलरीन से अतिचालक (सुपरकण्डक्टर्स) निर्मित किए गए हैं। उदाहरण के लिए - के$_3$ सी$_{60}$, आरबी$_3$ सी$_{60}$, आरबी सीएस$_2$ सी$_{60}$ क्रमशः 18, 30,33 और 40 केल्विन पर अतिचालक हो जाते हैं। इस प्रकार की स्थिति शायद फरमीतल पर स्थित ऊर्जास्तर घनत्व (डेन्सिटी ऑफ इनर्जी स्टेट्स) के कारण संभव है।

भौतिकीय वाष्प निक्षेपण (फिज़िकल वेपर डिपॉज़िशन) द्वारा क्रिस्टलीय फुलरीन तनु परत निर्मित की गई है। अति उच्च निर्वात निक्षेपण (अल्ट्रा हाई वैक्युअम इवैपोरेशन) यंत्र में वाष्प निक्षेपण द्वारा सिलिकन पटलिका पर निर्मित तनु परत में असंख्य दोष पाए गए। इसका मुख्य कारण सिलिकन पटलिका पर स्थित डैंग्लिंग आबन्ध माने गए। इसके विपरीत सिलकन डाइऑक्साइड आच्छादित सिलिकन तल पर फुलरीन तनु परत की क्रिस्टलीय संरचना काफी हद तक ऐपीटैक्सीय पाई गई। गैलियम एवं जर्मेनियम सेलीनाइड जैसे सबस्ट्रेट पर एपीटैक्सीय परत आसानी से निर्मित की गई है। सी-60 तनु परत की संरचना एवं निहित गुणधर्म के अध्ययन के लिए चित्र 4 में वर्णित विधि द्वारा मुक्त स्थित तनु परत का निर्माण किया गया है। इस विधि में प्रकाशीय अश्मलेखन, शुष्क एवं रसोत्कीर्णन प्रक्रियाओं को इस्तेमाल करके सिलिकन पटलिका में एक छेद बना लिया जाता है। तत्पश्चात् वाष्प निक्षेपण से सी-60 की तनु परत पटलिका के दूसरे तल पर निर्मित की जाती है। अन्त में प्लाज़्मा द्वारा सिलिकन शुष्कोत्कीर्णन विधि से सिलिकन आधार के विलयन के पश्चात् सी-60 तनु परत सिलिकन फ्रेम में उपलब्ध हो जाती है।

सी-60 एवं सी-70 क्रिस्टलीय ठोस की प्रतिरोधकता लगभग 10^{14} ओम-सेमी होती है। इन ठोसों में सामान्य वातावरण से प्रचुर मात्रा में ऑक्सीजन विसरित होती है। यदि इस ऑक्सीकरण प्रक्रिया को रोक दिया जाए तो प्रतिरोधकता घट कर 10^{8} ओम-सेमी तक आ जाती है। क्षारक परमाणु मादित सी-60 ठोस की प्रतिरोधकता प्रति अणु में मादक परमाणुओं की संख्या पर निर्भर करती है। परीक्षणों में देखा गया है कि प्रति सी-60 अणु में 3 क्षारक परमाणुओं की उपस्थिति में न्यूनतम प्रतिरोधकता मिलती है। इन मादित ठोसों की प्रतिरोधकता मात्रा फिर भी धातु की तुलना में काफी ज़्यादा होती है।

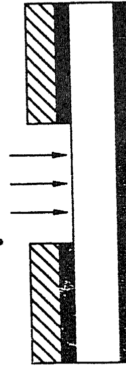
सी-60 अणु उच्च कोटि के प्रकाशीय सीमक (लिमिटर) होते हैं। गांव में प्रचलित बच्चों की आँख में लगाए जाने वाले काजल में शायद फुलरीन अणुओं की उपस्थिति ही इसकी उपयोगिता का एक कारण हो। काजल में फुलरीन अणुओं की पुष्टि भारतीय परीक्षणों में की गई है। घर में जलाई जाने वाली मोमबत्ती में 2-40 फुलरीन अणु देखे जा सकते हैं। फुलरीन को उचित बहुलक (पॉलीमर) के साथ मिश्रित करने से बहुलक से फुलरीन अणुओं में इलेक्ट्रॉन स्थानान्तरण के कारण ज़ेरोग्राफी के उत्तम गुण उत्पन्न होते हैं। इस विधि द्वारा उच्चकोटि के फोटोकॉपी मशीन के ड्रम का निर्माण संभव है। इस विधि के विकास से फोटोकॉपी के क्षेत्र में कम लागत पर उच्च गुणवत्ता मशीन निर्माण की काफी अधिक संभावनाएं दिखती हैं। धातु एवं फुलरीन परत संयोग से अनेक प्रकार की युक्तियों के निर्माण में सफलता मिली है। इनमें हेट्रोस्ट्रक्चर डायोड, फील्ड इफ़ेक्टस ट्रांज़िसटर और फोटोवोल्टाइक सेल जैसी युक्तियां सम्मिलित हैं। सी-60 तनु परत को प्रकाश- संवेदी

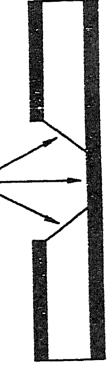
सिलिकन नाइट्रॉइड

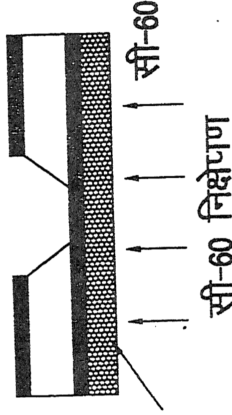
सिलिकन पटलिका

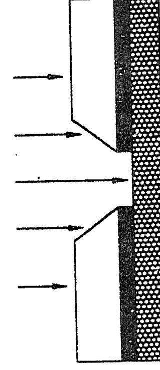
सिलिकन नाइट्रॉइड परत निर्माण









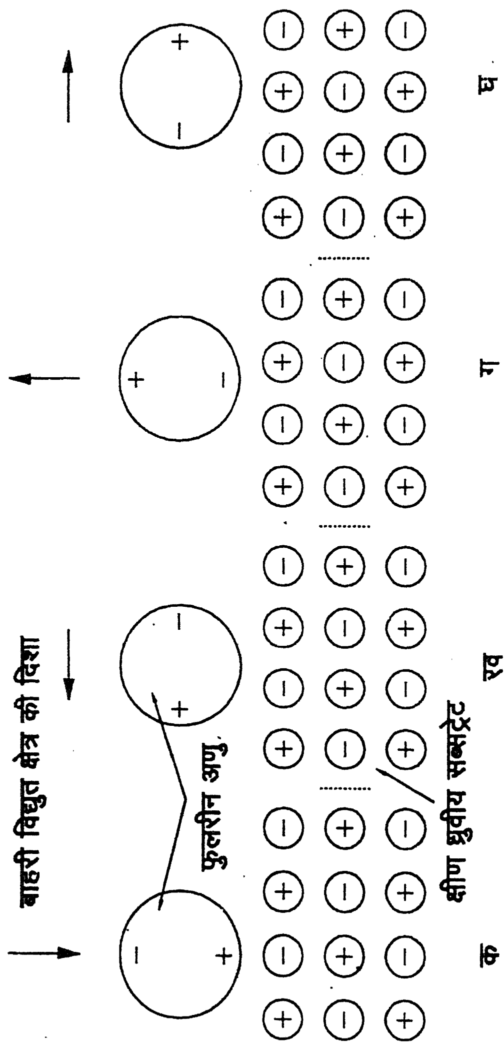


चित्र 4 मुक्त स्थिति सी-60 तनु परत निर्माण विधि

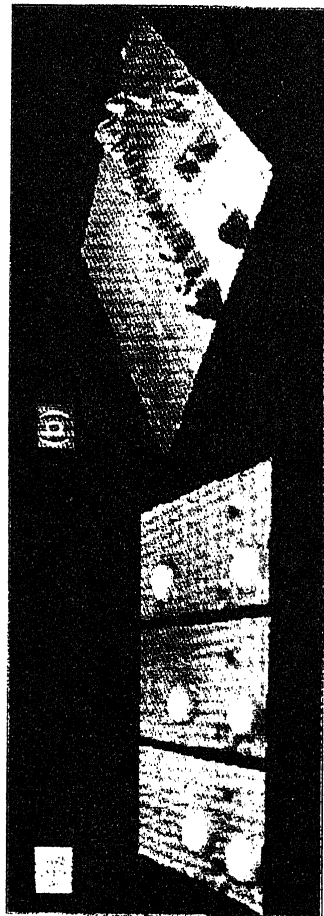
रेज़िस्ट की तरह इस्तेमाल करके 3 माइक्रॉन तक के ज्यामितीय आकारों पर आधारित अर्द्धचालक युक्ति परिपथ सफलतापूर्वक निर्मित किए गए हैं। सी-60 ठोस में ऑक्सीजन विसरण काफी तेज़ी से होता है इसलिए फुलरीन सम्बन्धित निर्माण में इस प्रक्रिया को रोकने के लिए निर्वात आधारित प्रक्रियाओं का उपयोग आवश्यक है। एक अणु मोटी फुलरीन परत द्वारा दो सिलिकन पटलिकाओं को आबन्धित (वेफर बॉडिंग) किया जा सकता है। इस विधि से अनेक अर्द्धचालक युक्ति संबन्धी अनुप्रयोगों को बढ़ावा मिल सकता है। इसी प्रकार एक अणु मोटी फुलरीन परत द्वारा एल्यूमीनियम एवं सिलिकन सतह पर ऑक्सीकरण प्रक्रिया को पूर्णतः रोका जा सकता है। सी-60 की उपस्थिति में हीरा तनु परत निर्माण कम ताप पर किया गया है। सी-60 की उपस्थिति सिलिकन सतह पर हीरा परत निर्माण में उत्प्रेरक का काम करती है। इसी प्रकार सिलिकन कार्बाइड निर्माण में फुलरीन से ताप कम करने में मदद मिलती है।

फुलरीन अणु उच्च प्रकार के उत्प्रेरक साबित हुए हैं। इनकी उपस्थिति से अनेक प्रकार की रासायनिक प्रक्रियाएं अधिक क्रियाशील हो जाती हैं। फुलरीन द्वारा अनेक प्रकार के नवीन अणुओं के निर्माण में मदद मिल रही है। एड्स के लिए पानी में घुलनशील यौगिकों के निर्माण में फुलरीन का इस्तेमाल सफलतापूर्वक किया गया है। चूंकि फुलरीन में 2 से लेकर 60 हाइड्रोजन परमाणुओं का समावेश सरलता से किया जा सकता है इसलिए फुलरीन हाइड्रोजन भंडारण के लिए एक अत्यधिक उपयोगी पदार्थ प्रमाणित हो रहा है। बैटरी निर्माण संबन्ध में प्राथमिक एवं द्वितीयक बैटरियों के लिए फुलरीन आधारित इलेक्ट्रोड काफी उपयोगी पाए गए हैं। स्कैनिंग टनलिंग माइक्रॉस्कोप (एसटीएम) के निर्माण में काम ली जाने वाली खोजी शलाका (प्रोब) की कड़ी नोक के ऊपर फुलरीन परत लगाने से माइक्रॉस्कोप गुणवत्ता में वृद्धि देखी गई है।

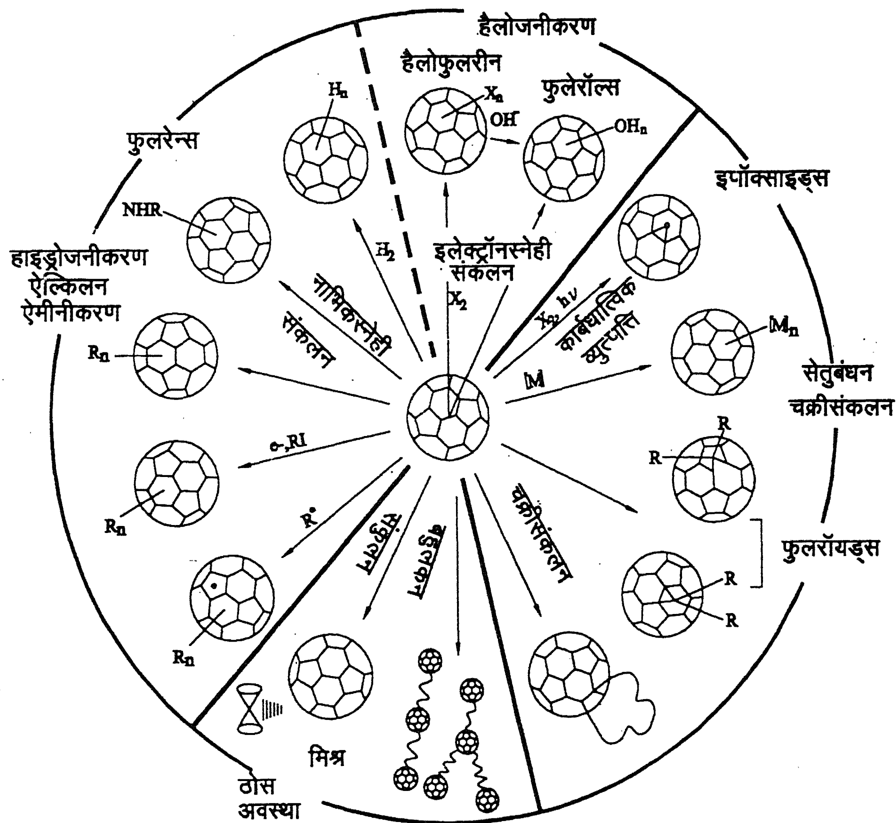
फुलरीन को स्नेहक में मिश्रित करने से स्नेहक क्षमता बढ़ जाती है। ध्रुवीय गैस जैसे अमोनिया या टेट्राक्लोरोएथिलीन के विसरण से फुलरीन की प्रतिरोधकता घटने लगती है। फुलरीन प्रतिरोधकता में आए परिवर्तन को इन गैसों की सान्द्रता के साथ सम्बन्धित कर हम इस प्रक्रिया पर आधारित गैस संवेदक का सरल निर्माण कर सकते हैं। कई प्रकार के विशेष अनुप्रयोगों में एकसमान विभव वाले तल की आवश्यकता होती है। इस संदर्भ में किए गये परीक्षणों में देखा गया कि लगभग एक नैनोमीटर पतली जरमेनियम परत के ऊपर 10 नैनोमीटर फुलरीन परत लगाने पर एकसमान विभव वाले तल का निर्माण सरल हो जाता है। सल्फोनेटित फुलरीन यौगिक को स्वतः समुच्चयी (सेल्फ एसेम्बली) विधि द्वारा एक अणु मोटी परत के रूप में किसी तल पर सरलतापूर्वक निर्मित किया जा सकता है। इस प्रक्रिया के अनेक लाभदायक अनुप्रयोग ढूंढे जा रहे हैं। अभी हाल में इलिनॉय विश्वविद्यालय में किए गए परीक्षणों में 100 टेरा हर्ज़ आवृत्ति पर करने वाली स्विच तथा स्मृति परिपथ निर्माण में सफलता मिली है। इस प्रयास में सर्वप्रथम समुचित रासायनिक प्रक्रिया द्वारा सिलिकन की स्वच्छ सतह पर स्थित डैंगलिंग आबन्धों को हाइड्रोजन द्वारा संतृप्त किया गया। तत्पश्चात् इस प्रकार मुक्त आबन्धरहित सिलिकन सतह सर एसटीएम खोजी शलाका पर विभव लगा कर वांछनीय स्थानों से हाइड्रोजन को हटाकर उनके स्थान पर फुलरीन अणु बिठाया गया। इस प्रकार के परीक्षणों के यह उम्मीद की जा रही है कि जल्द ही एक उच्च गुणवत्ता की स्विच का



चित्र 5 विद्युत क्षेत्र की सहायता से फुलरीन परमाणु का बेलन



चित्र 6 सिलिकन सब्सट्रेट पर सी-60 अणु तथा इन अणुओं से निर्मित क्वाण्टम तार



चित्र सं० 7 फुलरीन आधारित रासायनिक प्रक्रियाओं से उत्पन्न कार्बनिक यौगिक

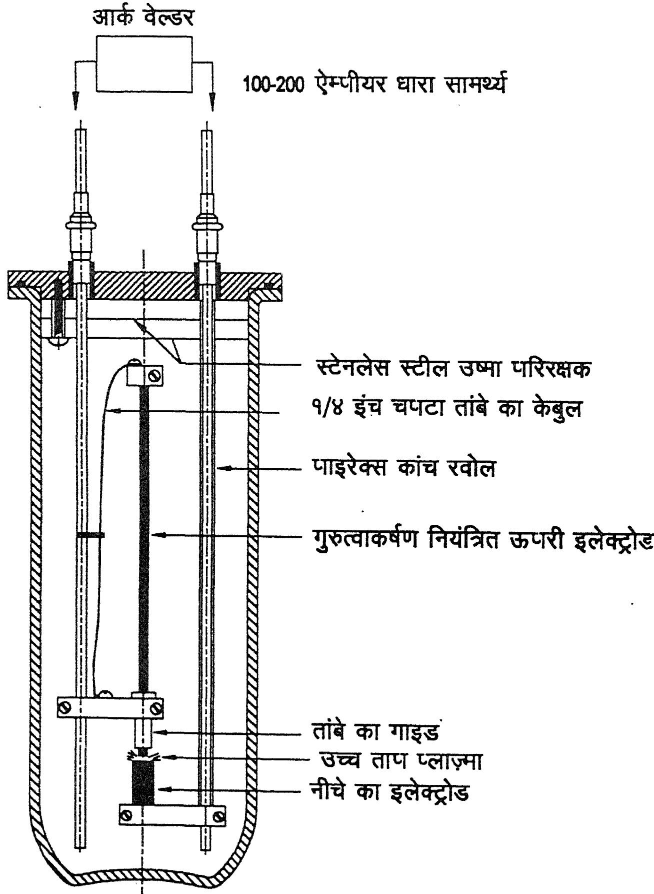
निर्माण संभव हो जाएगा। इस परीक्षण की सफलता से नैनोपरिपथों के निर्माण की एक नवीन विधि का आरंभ होगा।

फुलरीन अणु को एक ध्रुवीय सब्सट्रेट पर विद्युत क्षेत्र दिशा परिवर्तन द्वारा एक स्थान से दूसरे तक लुढ़काया जा सकता है। इस परीक्षण से फुलरीन अणुओं की ध्रुवीय प्रकृति का पता चलता है। इस प्रक्रिया का चित्र 5 विवरण दिया गया है। 'एसटीएम' नोक पर विभव लगाकर इन बड़े आकार के अणुओं को आसानी से एक स्थान से दूसरे स्थान पर नियन्त्रित रूप से स्थानान्तरित किया जा सकता है। इस विधि द्वारा नैनोसरंचनाओं के अनेक उपयोगी स्वरूप आसानी से तैय्यार किये जा सकते हैं। फुलरीन अणु समूहों को अनेक प्रकार के बड़े आकार के अणुओं को एक स्थान से दूसरे स्थान तक ले जाने में इस्तेमाल कर सकते हैं। चित्र 6 में एक फुलरीन अणु तथा कई अणुओं से निर्मित एक क्वाण्टम तार का वास्तविक चित्र दिखाया गया है।

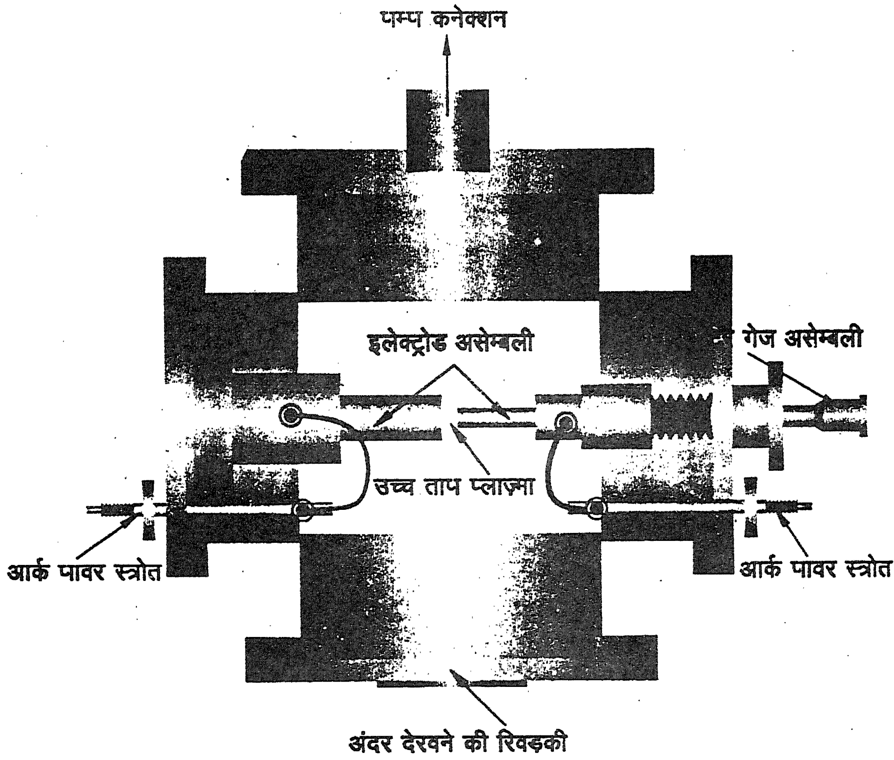
चित्र 7 में फुलरीन आधारित कुछ सामान्य कोटि की रासायनिक प्रक्रियाओं को संक्षिप्त में दर्शाया गया है। इनमें यौगिक निर्माण मुख्यतः हाइड्रोजनीकरण, ऐल्किलन एवं हैलोजनीकरण प्रक्रियाओं पर आधारित हैं। फुलरीन अणुओं में निहित रासायनिक सक्रियता अनेक प्रकार के यौगिकों के संश्लेषण में काम आती है। फुलरीन द्वारा कई प्रकार के बहुलक निर्मित किए गए हैं। (सी$_{60}$ पीडी) तथा (को-सी$_{60}$)-एकलकों से क्रमशः मोती हार (पर्ल नेकलेस) स्वरूप एवं धातु जैसे बहुलकों का निर्माण किया गया है। इन परीक्षणों से मालूम होता है कि बहुलक के विविध रूपों का संश्लेषण फुलरीन तथा अन्य यौगिकों के मिश्रण से आसानी से और अनेक रूपों में संभव है।

4. फुलरीन निर्माण

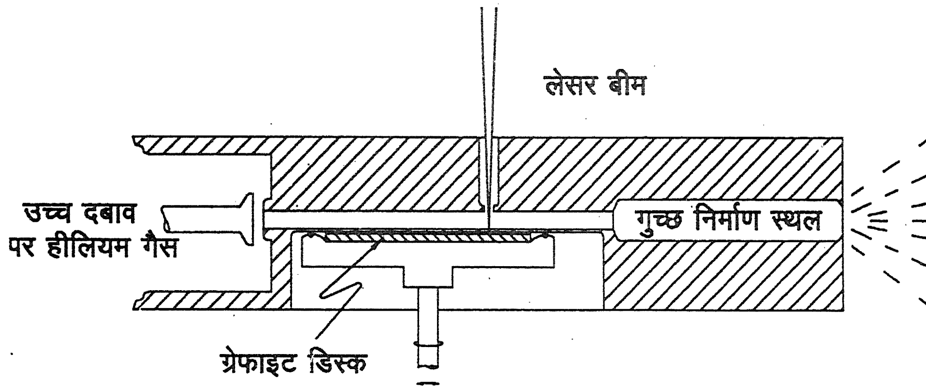
फुलरीन निर्माण में एक स्पर्श आर्क यंत्र (कॉन्टैक्ट आर्क ऐपरेटस), जिसका वर्णन चित्र 8 में दिया गया है, काम में लाया जाता है। इस यंत्र को एक साधारण आर्क में लगने वाले शक्ति स्रोत (पावर सप्लाई) से चलाया जाता है। 200 टॉर दबाव पर हीलियम वातावरण में दो ग्रेफाइट इलेक्ट्रोडों के बीच उत्पन्न आर्क द्वारा लगभग 4700^{0} से० ताप उत्पन्न होता है और इस परिस्थिति



चित्र 8 संपर्क आर्क द्वारा फुलरीन निर्माण विधि



चित्र 9 परिष्कृत कार्बन आर्क द्वारा फुलरीन निर्माण



चित्र 10 लेसर अपक्षरण द्वारा फुलरीन निर्माण विधि

में काजल जैसे जमा हुए द्रव्य से लगभग 4% फुलरीन परिशोधित करके निकाली गयी है। इस यंत्र में 6 मिलीमीटर व्यास की ग्रेफाइट शलाका से लगभग 1 ग्राम ग्रेफाइट 120 एम्पीयर आर्क धारा पर प्रति दस मिनट में खर्च होता है। एक परीक्षण में लगभग 50-100 सेमी लम्बी शलाका का इस्तेमाल करने के बाद यंत्र की भीतरी सतह पर जमा हुए काजल जैसे द्रव्य से फुलरीन निकाला जाता है। इस साधारण उपकरण को और परिष्कृत करके चित्र 9 में दिए गये रूप में इस्तेमाल करने से फुलरीन निर्माण लब्धि (यील्ड) में आश्चर्यजनक वृद्धि पाई गई। इस यंत्र में दो इलेक्ट्रोडों के बीच की दूरी माइक्रोमीटर द्वारा इच्छानुसार नियंत्रित की जा सकती है। इस निर्वात यंत्र का स्वच्छ वातावरण ही इसकी निर्माण लब्धि को बढ़ाता है। आर्क आधारित यंत्रों में किसी प्रकार भी पानी की मात्रा अन्दर कोष में नहीं जानी चाहिए। ऐसी स्थिति के लिए निर्वात कोष का उपयोग आवश्यक हो जाता है। हीलियम, आर्गन, नाइट्रोजन जैसी गैसों को इस्तेमाल करने के पहले इनमें से अशुद्धियों को जहाँ तक हो सके निकाल देना आवश्यक पाया गया है। अशुद्धियों तथा पानी की बहुत कम मात्रा की उपस्थिति में फुलरीन निर्माण पूर्णतः रुक जाता है।

सर्वप्रथम ग्रेफाइट प्लेट पर लेसर बीम द्वारा हीलियम वातावरण में अपक्षरण (अब्लेशन) द्वारा फ्लुरीन निर्माण पुष्टि द्रव्यमान स्पेक्ट्रोमेट्री (मास स्पेक्ट्रोमेट्री) से की गई थी। इस परीक्षण में चित्र 10 में दिए गए विवरण पर आधारित उपकरण का इस्तेमाल किया गया। नियोडियम-याग लेसर से उत्पन्न 10-100 मिलीजूल ऊर्जा तथा 5 नैनोसेकण्ड अवधि की लेसर स्पन्द बीम (पल्स्ड लेसर बीम) को ग्रेफाइट सतह पर डालने से ग्रेफाइट वाष्प बनकर उच्च ताप प्लाज़्मा में परिवर्तित हो जाता है। उच्च ताप प्लाज़्मा के हीलियम वातावरण में शमन (क्वेन्चिंग) से कार्बन गुच्छों (क्लस्टर्स) की उत्पत्ति होती है। उत्सर्जित कार्बन गुच्छों में निहित कार्बन परमाणु संख्या द्रव्यमान स्पेक्ट्रोमीट्री द्वारा आसानी से मालूम की जा सकती है। इस तरह के एक परिणाम का वर्णन चित्र 2 में दिया जा चुका है।

इसके अतिरिक्त ग्रेफाइट शलाका से उच्च आवृत्ति प्रेरण तापन (हाई फ्रीक्सेन्सी इण्डक्शन हीटिंग) द्वारा 2700^{0} से० ताप पर फुलरीन अणु निर्मित किए गए हैं। बेन्जीन-ऑक्सीजन-आर्गन ज्वाला से भी लगभग 1800^{0} से० पर फुलरीन अणु निर्मित किए गए हैं। दक्षिण भारत में एक विशेष प्रकार के पेड़ से प्राप्त रस द्वारा निर्मित काजल में फुलरीन की पुष्टि की गई है। इस परीक्षण से लगता है कि अगर उचित पूर्वगामी (प्रीकर्सर) कार्बनिक यौगिक का पता चल जाए तो यह संभव है कि कम ताप पर फुलरीन अणुओं का निर्माण हो सके। इस विधि के विकास के बाद फुलरीन यौगिक की निर्माण लागत को यथावत् कम किया जा सकता है। अभी तक के परीक्षणों में उत्पाद लब्धि कम होने से फुलरीन यौगिक काफी मंहगे मिलते रहे हैं। इन यौगिकों पर होने वाले परीक्षणों को और अधिक बढ़ावा मिलेगा जब इनकी यथेष्ट मात्रा कम दाम पर उप्लब्ध होगी।

5. कार्बन नैनोनलिका गुणधर्म

कार्बन नैनोनलिका संरचना अध्ययन के लिए उच्च विभेदन (हाई रिज़ोल्यूशन) संचरण इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी (टीईएम) की सहायता ली जाती है। कार्बन नैनोनलिकाओं के आरंभिक परीक्षणों में अक्सर

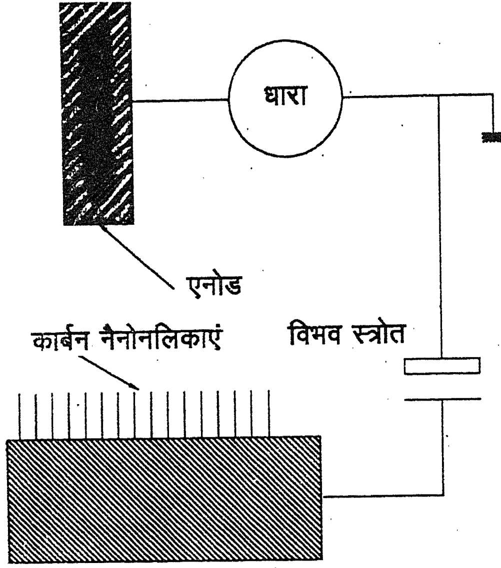
बहुपरतीय नलिकाएं ही देखी गईं। कुछ परीक्षणों में कार्बन आर्क विधि द्वारा निर्मित कार्बन नैनोनलिकाओं में 2 से लेकर 20 नैनोमीटर बाहरी व्यास तथा 1 से लेकर 3 नैनोमीटर भीतरी व्यास की संरचनाएं देखी गईं। इन नैनोनलिकाओं की लम्बाई माइक्रॉन में होने के कारण इनको एक-आयामी संरचना कहा गया। बहुपरतीय नलिकाओं में एक से दूसरे परत के बीच लगभग 0.34 नैनोमीटर खाली स्थान मापा गया। बहुपरतीय नैनोनलिकाओं पर अगर इलेक्ट्रॉन बीम डालकर संरचना-अध्ययन किया जाए तो इन नैनोनलिकाओं से प्याज़ जैसी आकृति के स्पष्ट संकेत मिलते हैं।

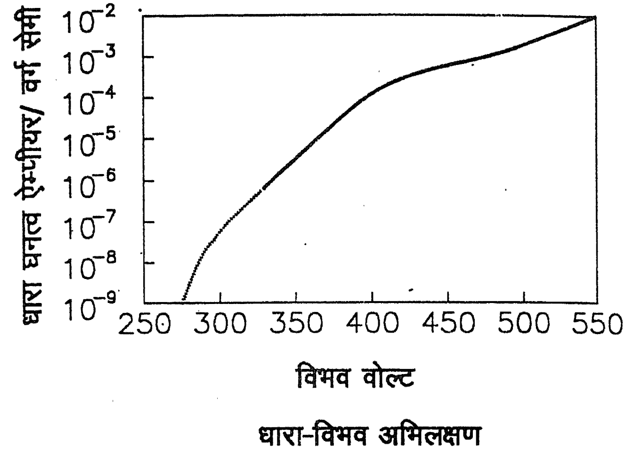
एकपरतीय कार्बन नैनोनलिका निर्माण काफी बाद में संभव हो सका। एक परतीय नलिकाएं आश्चर्यजनक रूप से लचीली तथा 2 नैनोमीटर व्यास में मुड़ सकती हैं। इनके अन्दर उच्च तनन सामर्थ्य (टेन्साइल स्ट्रेन्थ) तथा आयतन प्रत्यास्थता गुणांक (बल्क माड्युलस कोएफिशिएन्ट) की विशेषताएं पाई गई हैं। एकपरतीय नैनोनलिका निर्माण में नैनोनलिकाओं के व्यास में उत्प्रेरक के अनुसार एक विशेष प्रकार का वितरण देखा गया है। लौह उत्प्रेरक द्वारा निर्मित एकपरतीय नलिकाओं के व्यास का वितरण 0.7 से 1.6 नैनोमीटर तक मिला और लगभग 1 नैनोमीटर व्यास की नलिकाओं की संख्या सबसे अधिक पाई गई। सबसे पतली नैनोनलिका का व्यास 0.7 नैनोमीटर मापा गया जो सी-60 के व्यास के बराबर है। एकपरतीय नैनोनलिका संरचना चित्र 3 में दिखाई गई है।

नैनोनलिका निर्माण में अक्सर बहुपरतीय तथा एकपरतीय नलिकाएं एक नैनोगट्ठर (नैनोबण्डल) या नैनोरस्सी (नैनोरोप) के रूप में निर्मित होती हैं। इन नैनोगट्ठरों में सारी नैनोनलिकाएं लगभग एक लम्बाई की तथा समान्तर रूप से वान् डर वाल आकर्षण द्वारा आपस में जुड़ी होती हैं। इनको विशेष विधियों द्वारा अलग करके काम में लाया जाता है।

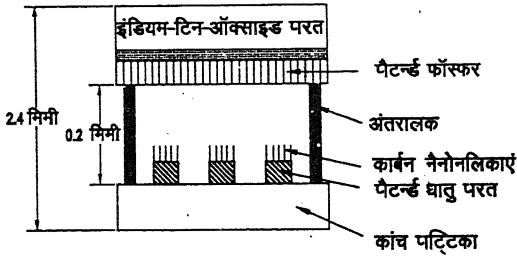
नैनोनलिका के सिरे पर पंचभुजीय आकृति में आबन्धित कार्बन परमाणुओं के कारण नलिका के दोनों सिरे तुलनात्मक रूप से अधिक अभिक्रियाशील होते हैं। यदि नाइट्रिक अम्ल के साथ इन नैनोनलिकाओं को गर्म किया जाए तो दोनों सिरे कार्बन परमाणुओं के आक्सीकरण के पश्चात् खुल जाते हैं। लेड धातु उत्प्रेरक की उपस्थिति में सिर्फ 400^0 से० पर ही सामान्य वातावरण में ऑक्सीकरण सम्पन्न हो जाता है। खुले सिरे वाली नैनोनलिका के अन्दर नाइट्रिक अम्ल, गन्धक, सीज़ियम, रुबीडियम, सेलीनियम, पानी तथा अन्य कार्बननिक यौगिकों को सूक्ष्मकोशिका (माइक्रोकैपिलरी) क्रिया द्वारा आसानी से अन्दर डाला जा सकता है। इसके आधार पर नैनोनलिकाओं में कोबाल्ट, निकिल तथा आयरन जैसी धातुएँ भरी जा चुकी हैं। इन नलिकाओं के अन्दर के पदार्थ भी एक-आयामी संरचना के रूप में अनेक उपयोगी क्रियाओं में भाग लेते हैं।

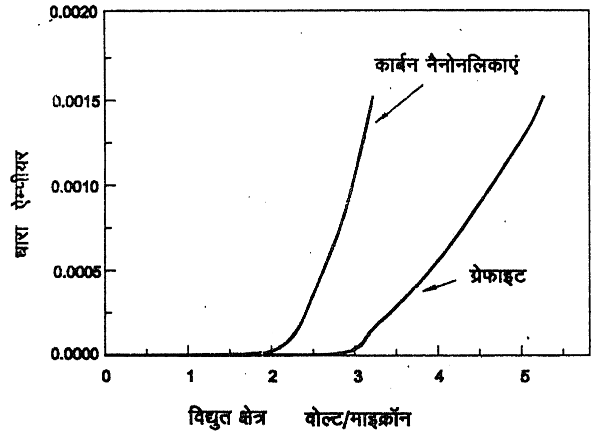
यद्यपि नैनोनलिकाएं चुम्बकीय अनुप्रयोग के लिए बिल्कुल उपयुक्त नहीं होती हैं परन्तु इनके अन्दर चुम्बकीय धातुओं की सूक्ष्मकोशिका प्रक्रिया द्वारा समावेशन से उत्पन्न चुम्बकीय प्रभाव को कई प्रकार से इस्तेमाल किया जा सकता है। नैनोनलिकाओं में चुम्बकीय पदार्थ डालकर तथा इनको किसी बहुलक के साथ मिलाकर इनके द्वारा एक लचीली सतह वाली चुम्बकीय परत का निर्माण सरलता से किया जा सकता है।





चित्र सं. 11 कार्बन नैनोनलिका से इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन परीक्षण





चित्र सं. 12 कार्बन नैनोनलिका द्वारा निर्मित समतल पटल प्रदर्श

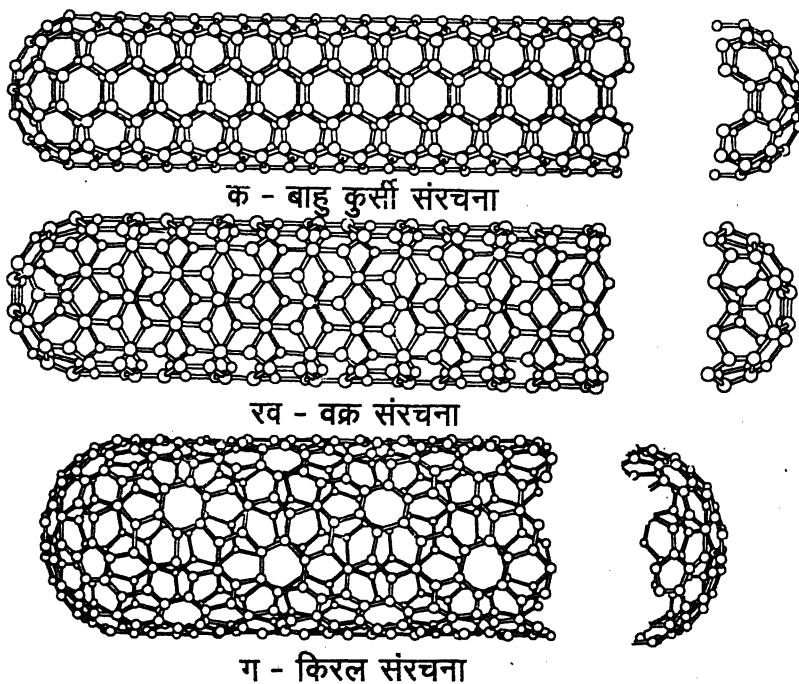
नैनोनलिका के अन्दर धातु डालकर या इनके ऊपर धातु परत लगाकर स्कैनिंग इलेक्ट्रॉन माइक्रॉस्कोप (सेम) के फिलामेण्ट बनाए गए हैं। एक एवं बहुपरतीय नैनोनलिकाओं से यथेष्ट मात्रा में कम विभव पर इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन प्रक्रिया देखी गई है। इनकी सुदृढ़ नोक, लम्बाई एवं व्यास का अत्यधिक अनुपात तथा इनकी उच्च यांत्रिकीय सामर्थ्य नैनोनलिकाओं को क्षेत्र उत्सर्जन के लिए एक आदर्श संरचना प्रदान करते हैं। इस संदर्भ में किए गए एक सरल परीक्षण का विवरण संक्षिप्त में दिया गया है। नैनोनलिकाओं को एक धातु के सब्स्ट्रेट पर लगाकर एक नुकीले एनोड को उचित विभव पर इनके नजदीक लाकर निर्वात कोष में धारा-विभव अभिलक्षण नापने पर चित्र 11 में दिए गए परिणाम प्राप्त हुए। इस परीक्षण द्वारा नैनोनलिकाओं द्वारा इलेक्टॉन उत्सर्जन प्रक्रिया की पुष्टि की गई। एकपरतीय नैनोनलिकाओं से बहुपरतीय नैनोनलिकाओं की अपेक्षा बेहतर उत्सर्जन पाया गया है। क्षेत्र उत्सर्जन प्रक्रिया के संबन्ध में किए गए अनेक परीक्षणों के अध्ययन से यह सुनिश्चित हो गया है कि यदि नैनोनलिका निर्माण इस प्रकार किया जाए कि सारी नैनोनलिकाएं समान्तर रूप में ऊर्ध्वाकार अवस्था में एक विशेष प्रकार के धरातल पर समान रूप से वितरित हों तथा इनके नीचे के सिरे पर वैद्युतीय सम्पर्क संभव हो तो इससे समतल पटल प्रदर्श निर्माण में काफी सहायता मिल सकती है। नैनोनलिका आधारित एक ऐसे ही समतल पटल प्रदर्श का निर्माण, जैसा कि चित्र 12 में दिखाया गया है, किया जा चुका है। इस प्रक्रिया में नाइट्रोसेल्यूलोज में मिश्रित अस्त-व्यस्त नैनोनलिकाओं को जब एक छलनी के महीन छेद से एक विशेष पैटर्न पर निकाला गया तो नैनोनलिकाएं स्वतः सरेखित हो गईं। उच्च ताप पर नाइट्रोसेल्यूलोज़ वाष्पित होकर निकल गया परन्तु सरेखित नैनोनलिकाएं धातु पैटर्न पर लगी रहीं। इस सरल प्रक्रिया द्वारा समतल पटल प्रदर्श का निर्माण सफल हो सका। इन उत्सर्जकों से कम विभव पर प्राप्त इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन धारा को चित्र 12 में प्रदर्शित किया गया है।

इस संबन्ध में सबसे अहम प्रश्न नैनोनलिकाओं के सरेखिक निर्माण का है। इस दिशा में अभी हाल में कुछ परीक्षण किए गए हैं जिसमें एल्यूमीनियम की तनु परत में एनोडीय आक्सीकरण द्वारा नैनोछिद्रों का निर्माण किया गया। इस विधि से निर्मित नैनोछिद्र लगभग एकसमान व्यास के और एक दूसरे से समान दूरी पर पूरी सतह पर वितरित पाए गए। इन नैनोछिद्रों की सतह पर एल्यूमीनियम ऑक्साइड की परत होने से इनके अन्दर वाष्प निक्षेपण द्वारा ऊर्ध्वाकार नैनोनलिकाएं सफलतापूर्वक निर्मित की गई हैं। इस प्रक्रिया में नैनोछिद्र की नीचे सी सतह पर उत्प्रेरक की परत निर्मित कर जब ऐसिटिलीन गैस को उच्च ताप पर प्रवाहित किया गया तो इन नैनोछिद्रों में कार्बन नैनोनलिकाएं निर्मित हुईं। अभी हाल के अनुसंधान से मालूम हुआ कि यदि नैनोनलिकाएं पटल पर खड़ी होने के बजाय समान्तर लेटी हुई हों तो इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन कम विभव पर ज़्यादा धारा उत्पन्न करता है। इसका कारण नैनोनलिकाओं के बेलनाकार तल पर स्थित जालक दोषों को बताया गया है। संभव है अस्त-व्यस्त अवस्था में नैनोनलिकाओं से प्राप्त परिणाम इस धारणा को पुष्ट करते हों। इन विधियों के समुचित विकास से नैनोनलिका निर्माण में वांछित परिवर्तन आने की आशा की जाती है। इस विधि के और विकास से संभव है कि उचित प्रकार के समतल पटल प्रदर्श का निर्माण कम लागत पर भविष्य में हो सके। सैम्सुंग एडवाँस्ड इन्स्टीट्यूट ऑफ टेक्नॉलॉजी, कोरिया,

ने हाल में 9 इंच आकार के रंगीन समतल पटल प्रदर्श का सफल प्रदर्शन किया। इस प्रदर्श में उसी आकार के द्रव क्रिस्टलीय प्रदर्श की तुलना में लगभग आधी ऊर्जा की आवश्यकता पड़ती है। इसके अतिरिक्त10000 घंटे तक बिना किसी विफलन के प्रदर्श ने कार्य किया। इन नवीन शोध परिणामों से आशा की जाती है कि शीघ्र ही ऐसे प्रदर्श बाज़ार में उपलब्ध होंगे।

नैनोनलिकाओं के अन्दर रिक्त स्थान को एक नैनोपरखनलिका की तरह इस्तेमाल किया जा सकता है। इसके अन्दर अनेक प्रकार के रासायनिक परीक्षण संभव हैं। इसके साथ-साथ यह भी हो सकता है कि नैनोनलिका के अन्दर विशेष औषधि को सूक्ष्मकोशिका प्रभाव द्वारा डाल कर उसको बाहर से नियन्त्रित मात्रा में इच्छानुसार निकाल कर यथास्थान शरीर के अन्दर उपयोग में ला सकें।

नैनोनलिका में संयुग्मित द्विआबन्धों (कोऑरडिनेटेड डबल बॉण्ड) की उपस्थिति से संकलन रासायनिक प्रक्रियाओं द्वारा अनेक फलनक समूहों को इनसे जोड़कर अनेक प्रकार के द्रव्यों में घुलनशील बनाया गया है। इन पार्श्वफलनक समूहों की सहायता से इनकी चालकता को भी प्रभावित किया गया है। इस दिशा में फुलरीन के सम्बन्ध में किए गए परीक्षण फलों से काफी मदद मिल रही है।

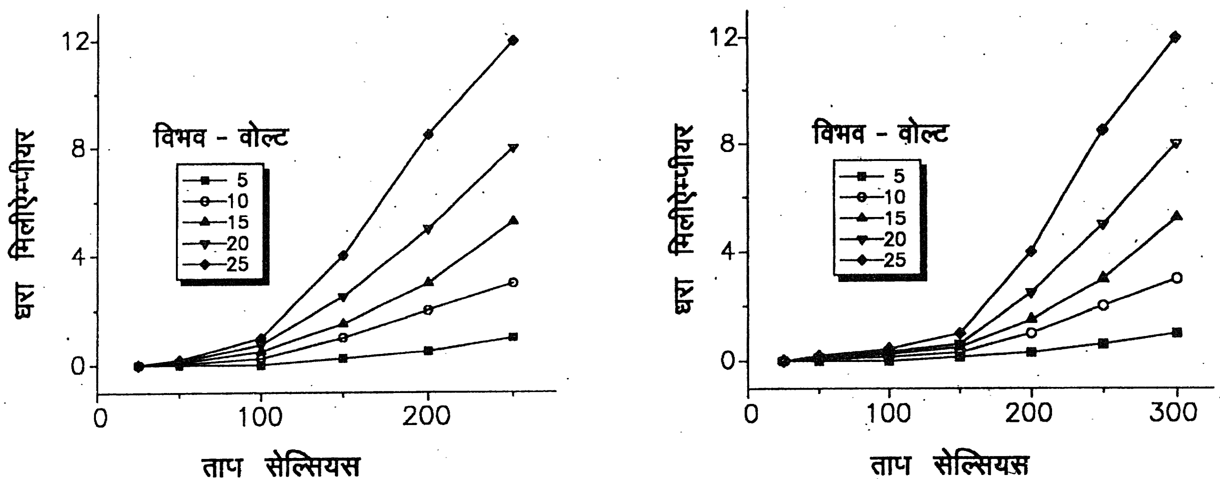


चित्र सं० 13 कार्बन नैनोनलिका की तीन संभावित संरचनाएं

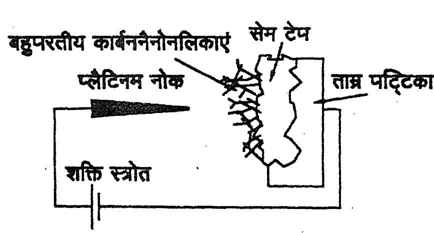
नैनोनलिका इलेक्ट्रॉन संरचना अध्ययन से प्रतीत होता है कि इनकी संरचना में फेर-बदल करने में इन्हें अचालक, अर्द्धचालक या सुचालक बनाया जा सकता है। यदि नैनोनलिका में स्थित षटभुजीय आबन्ध नैनोनलिकाक्ष के समान्तर सीधे नीचे से ऊपर तक जा रहे हों तो यह नैनोनलिका, जिसे आर्मचेयर कहते हैं, धातु प्रकृति की होगी। इसके अतिरिक्त यदि आबन्ध एक हेलिक्स के रूप में नैनोनलिका की सतह पर स्थित हों तो इसकी प्रकृति अर्द्धचालक की होगी। इन परिस्थितिओं की परीक्षण द्वारा पुष्टि हो चुकी है। तीन प्रकार की नैनोनलिका संरचना का वर्णन चित्र 13 में दिया गया है। इन सूक्ष्म अवयवों की सहायता से सामान्य प्रकार की अर्द्धचालक युक्तियों के निर्माण की कोई संभावना अभी नहीं दिखाई देती है। भविष्य में संभव है कि ऐसी विधियाँ विकसित हों जिनकी सहायता से हम इन संरचना विशेष की नैनोनलिका को दूसरी के अन्दर या बाहर स्थिर कर सकें। ऐसी स्थिति में कथित नैनोयुक्तियों का सृजन संभव हो सकता है पर इस अवस्था तक पहुँचने के लिए काफी समय लग सकता है। आज का सबसे बड़ा प्रश्न नैनोनलिका से सम्पर्क स्थापित करना है जिसको हल करने के लिए अनेक प्रकार की सूक्ष्म तकनीकों का विकास करना आवश्यक होगा।

नैनोनलिका के दोनों सिरे सामान्यतः अर्द्धगोलीय जाल से, जिसकी संरचना पंचभुजीय-षटभुजीय आबन्धों से मिलकर बनती है, ढके होते हैं। सिरे की संरचना नैनोनलिका के आकार एवं संरचना द्वारा निर्धारित होती है। संरचना के भौतिकीय स्थायित्व के आधार पर अनेक संभावित स्वरूपों के सुझाव दिए गए हैं। बड़े व्यास की नैनोनलिकाओं के सिरे अक्सर चपटे जाल से बने होते हैं। कभी-कभी परीक्षणों में शंक्वाकार सिरे भी देखने में आए हैं।

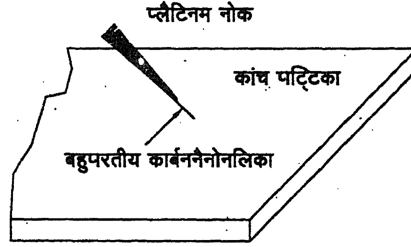
यद्यपि नैनोनलिका प्रतिरोधकता नापना इतना आसान नहीं है पर नैनोनलिकाओं के अस्तव्यस्त वितरण से प्राप्त पदार्थ की प्रतिरोधकता नापकर इनके वैद्युतीय गुण को औसतन समझने का प्रयत्न किया गया है। इस सरल विधि द्वारा त्रुटि मादन से उत्पन्न प्रतिरोधकता परिवर्तन को स्पष्ट देखा गया है। अस्त-व्यस्त कार्बन नैनोनलिकाओं से प्राप्त पदार्थ को ब्रोमीन और पोटैशियम वाष्प से उपचरित करके देखा गया कि प्रतिरोधकता लगभग 30 गुनी कम हो गई। एक अकेली नैनोनलिका पर प्रतिरोधकता मापन परीक्षण करने के लिए अभी हाल ही में कुछ प्रयास किए गए हैं। एक ऐसी विधि में नैनोनलिकाओं को क्लोरोफार्म में डालकर अल्ट्रासॉनिक प्रक्रिया द्वारा अच्छी तरह मिला लिया गया। तत्पश्चात् क्लोरोफार्म की एक बूंद सिलिकन पटलिका पर, जिसपर पहले से 50 नैनोमीटर सिलिकन ऑक्साइड की परत निर्मित थी, डाली गयी। आयन बीम द्वारा विशेष आर्गनिक यौगिक की सहायता से 100×100 वर्ग माइक्रॉन आकार के टंग्स्टेन धातु के उचित स्थान पर पैड बना लिए गए। इस प्रकार के दो पैडों के बीच स्थित एक नैनोनलिका पर विभव लगातार धारा प्रभावित की गई। इस परीक्षण से प्राप्त ताप के साथ धारा परिवर्तन अभिलक्षण चित्र 14 में दिए गए हैं। इनसे पता चलता है कि एक अकेली नैनोनलिका में लगभग 10^7 एवं 10^9 एम्पीयर/वर्ग सेमी धारा घनत्व क्रमशः 300 तथा 573 कोल्विन पर संभव है। अमादित नैनोनलिका के बोरान मादन पश्चात् इसकी प्रतिरोधकता $5.3 \times 10^{-6} - 1.9 \times 10^{-5}$ ओम-सेमी से घटकर $7.4 \times 10^{-7} - 7.7 \times 10^{-6}$ ओम-सेमी हो जाती है। एक और विधि में जिसका संक्षिप्त विर्णन चित्र 15 में दिया गया है, नैनोनलिकाओं से बने स्पंजीय पदार्थ से एक नैनोनलिका को निकाल कर कांच पटिट्का पर लगाकर उचित प्रकार के प्रबन्ध द्वारा



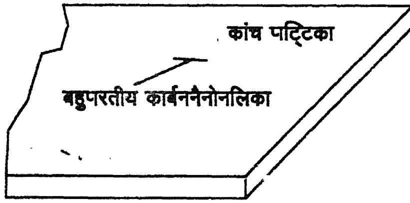
चित्र सं० **14** बोरॉन मादन द्वारा कार्बन नैनोनलिका धारा-ताप अभिलक्षण में परिवर्तन



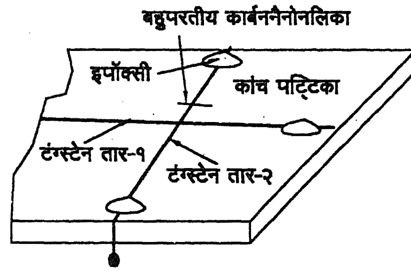
क - कार्बन नैनोनलिका से प्लैटिनम नोक का सम्पर्क



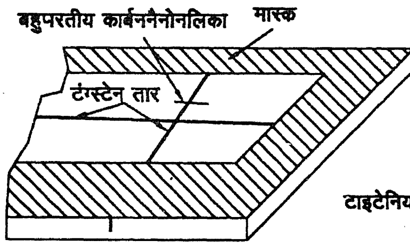
ख - कार्बन नैनोनलिका का कांच पट्टिका पर स्थानान्तरण



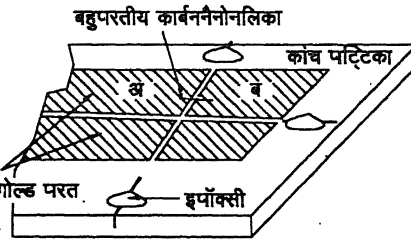
ग - कांच पट्टिका पर एलाइनमेंट



घ - इपॉक्सी द्वारा टंग्स्टेन तार लगाना



च - टाइटेनियम-गोल्ड तनु परत निक्षेपण



छ - बहुपरतीय कार्बन नैनोनिका पर स्थापित वैद्युतीय संपर्क

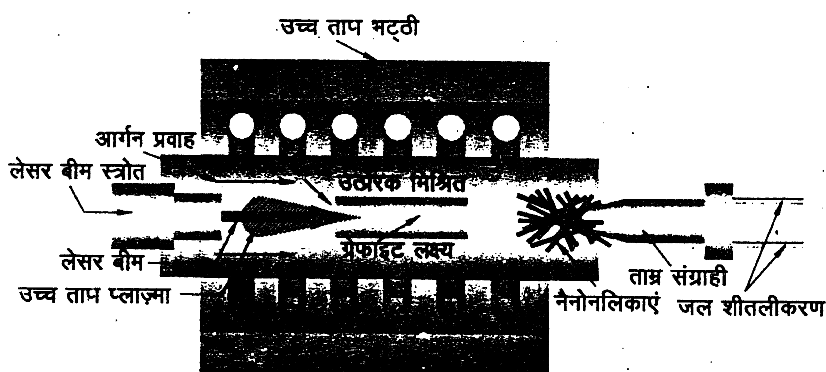
चित्र सं० 15 एक बहुपरतीय कार्बन नैनोनलिका के धारा-विभव अभिलक्षण नापने की विधि

स्पर्श करने का प्रयास किया गया। प्लैटिनम नोक पर विभव लगाकर उचित प्रकार के प्रबन्ध द्वारा स्पर्श करने का प्रयास किया गया। प्लैटिनम नोक पर विभव लगाकर नैनोनलिकाओं के समूह से एक नैनोनलिका निकाल कर कांच पटि्टका पर लगाकर उचित प्रकार के प्रबन्ध द्वारा स्पर्श करने का प्रयास किया गया। प्लैटिनम नोक पर विभव लगाकर नैनोनलिकाओं के समूह से एक नैनोनलिका निकाल कर कांच पटि्टका पर रखकर उसके ऊपर दो टंग्स्टेन के तार लगा दिए गए। मास्क के उचित आकार के निर्माण से तथा टाइटेनियम-गोल्ड निक्षेपण द्वारा नैनोलिका के दोनों सिरे पर स्पर्श करते हुए दो धातु के पैड निर्मित किए गए। इस विधि द्वारा कार्बन नैनोनलिका के एक आयामी क्वाण्टम संवहन की पुष्टि की गई।

कार्बन नैनोनलिका आधारित इलेक्ट्रॉनीय युक्तियों से लगता है कि भविष्य में नैनोचिप' का निर्माण हो सकेगा। 'नैनोबॉट' के मस्तिष्क में इस प्रकार की 'नैनोचिप' से वांछनीय सफलता मिलने के आसार दिखते हैं।

6. कार्बन नैनोनलिका निर्माण

एकपरतीय नैनोनलिका निर्माण में लेसर अपक्षरण तकनीक एक प्रभावकारी विधि के रूप में विकसित की गई है। इस विधि में, जैसा कि चित्र 16 में दर्शाया गया है, 1.2% कोबाल्ट-निकिल मिश्र उत्प्रेरक एवं ग्रेफ़ाइट मिश्रण से बने लक्ष्य पर नियोडाइमियम-याग (एनडीयाग) से उत्पन्न ऊर्जा लेसर बीम ऑर्गन वातावरण में डालने से ग्रेफ़ाइट वाष्प निर्मित होती है। भट्टी के अन्दर 1200^0 से० ताप पर निर्मित नैनोनलिकाएँ ऑर्गन के बहाव के साथ कम ताप वाले भाग में आकर पानी से ठंडे किए हुए तांबे के संग्राही (कलेक्टर) पर जम जाती हैं। संग्राही सतह पर जमे पदार्थ में 10-20 नैनोमीटर व्यास तथा 100 माइक्रॉन लम्बी नैनोनलिकाएँ सूक्ष्मदर्शी में देखी गईं। नैनोरस्सी में पाई जाने वाली बहुत सारी नैनोनलिकाएँ के व्यास में ज़्यादा वितरण नहीं देखा गया परन्तु एक से दूसरी



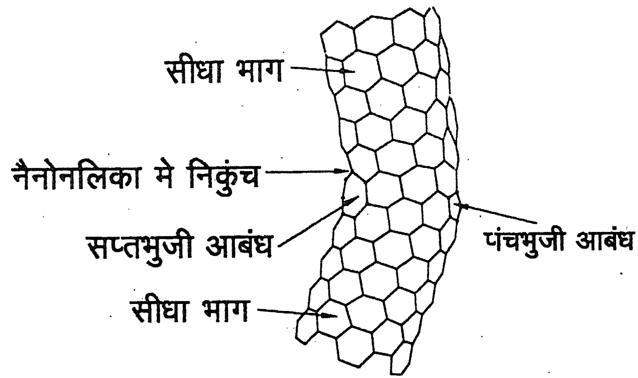
चित्र सं० 16 लेसर अपक्षरण द्वारा कार्बन नैनोनलिका निर्माण विधि

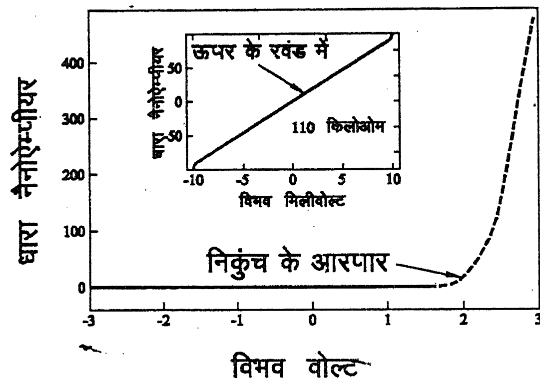
नैनोरस्सी के बीच तुलनात्मक रूप में विभिन्न प्रकार के वितरण देखने में आए। उत्प्रेरक तथा निक्षेपण विधि के प्राचलों के परिवर्तन से नैनोनलिका संरचना एवं प्रकृति में बदलाव लाया जा सकता है।

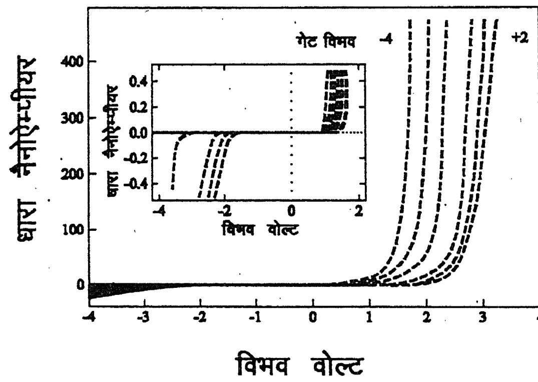
कार्बन आर्क विधि का उपयोग नैनोनलिका निर्माण में काफ़ी किया गया है। इस विधि के लिए चित्र 9 में दिए गए वर्णन के अनुसार, 5-20 मिली व्यास के ग्रेफ़ाइट इलेक्ट्रोडों के बीच 1 मिमी दूरी पर 50-120 एम्पीयर धारा तथा 20-25 वोल्ट विभव पर 500 टॉर हीलियम दबाव वातावरण में नैनोनलिका निर्माण किया गया। इस यंत्र में ऋणात्मक इलेक्ट्रोड पर जमे हुए कार्बनीय पदार्थ में नैनोनलिकाएं पाई गईं। बहुपरतीय नलिकाओं के लिए ग्रेफ़ाइट के साथ किसी उत्प्रेरक की ज़रूरत नहीं पड़ती है। यहाँ पर यह विचारणीय तथ्य है कि कार्बन आर्क विधि से नैनोनलिका निर्माण तथा फुलरीन निर्माण के प्राचल एक दूसरे से बिल्कुल अलग पाए गए। एकपरतीय नैनोनलिकाओं के निर्माण के लिए कार्बन आर्क में लगाए जाने वाली शलाकाओं में कोबाल्ट, निकिल, आयरन, इट्रियम एवं गैडोलीनियम जैसे उत्प्रेरकों की ज़रूरत पड़ती है। कुछ परीक्षणों में आयरन-निकिल, कोबाल्ट-निकिल या कोबाल्ट-प्लैटिनम जैसे दो उत्प्रेरकों का भी इस्तेमान किया गया है। कार्बन आर्क विधि में नैनोनलिकाओं के साथ-साथ ग्राफीन परत चढ़ी हुई कार्बाइड एवं अन्य धात्वीय गुच्छ संरचनाएं भी निर्मित होती हैं। इसलिए नैनोनलिकाओं को अलग करने के लिए तथा इनको परिशोधित करने के लिए अनेक प्रकार की विशिष्ट विधियों का विकास किया गया है।

भौतिक वाष्प निक्षेपण (फिज़िकल वेपर डिपॉजीशन) द्वारा नैनोनलिका निर्माण विधि के समुचित विकास के साथ में अनेक अपेक्षाएं जुड़ी हुई हैं। शुरू में इस विधि का विकास कार्बन फाइबर के लिए किया गया था। परन्तु प्राचलों के थोड़े-बहुत फेर-बदल से इसके द्वारा नैनोनलिका निर्माण की भी पुष्टि की जा चुकी है। **1100^0** से० पर आयरन उत्प्रेरक की उपस्थिति में कम दाब पर बेन्ज़ीन वातावरण में नैनोनलिकाएं निर्मित की गई हैं। इस विधि से ज़्यादातर बहुपरतीय नैनोनलिकाएं निर्मित होती हैं परन्तु इनके साथ कभी-कभी एकपरतीय नैनोनलिकाएं भी देखी गई हैं। इन विधियों के अतिरिक्त आयन या इलेक्ट्रॉन बीम द्वारा ग्रेफ़ाइट सतह पर उच्च ताप उत्पन्न कर नैनोनलिकाएं निर्मित की गई हैं। इन विधियों से कोई ऐसे समुचित फल नहीं प्राप्त हुए जिसके कारण इस दिशा में और विकास किया जा सके। एक अन्य परीक्षण में सौर ऊर्जा संग्रहीत कर लगभग **3000** केल्विन ताप उत्पन्न कर नैनोनलिका निर्माण विधि को प्रभावकारी बनाने के अगर और प्रयास किए जायं तो यह संभव है कि भविष्य में कम लागत पर नैनोनलिका निर्माण हो सके।

नैनोनलिकाओं को अवांछनीय अशुद्धियों से अलग करने के लिए गैस, द्रव तथा अन्तर्निवेशन आधारित विधियों का विकास किया गया है। छानना, क्रोमैटोग्राफी जैसी सामान्य विधियों से इस दिशा में कोई विशेष सफलता नहीं मिली। ऑक्सीजन गैस की उपस्थिति में निर्माण यंत्र से निकाले गए समूचे पदार्थ को गर्म करने पर साधारणतः अवांछनीय अशुद्धियों तथा कम व्यास की नैनोनलिकाएं लगभग समाप्त हो जाती हैं। बहुपरतीय नैनोनिकाओं की ऊपरी परत का, जिसमें संरचनात्मक त्रुटियाँ होती हैं, ऑक्सीकरण आसानी से होता है। परन्तु कुछ नैनोनलिकाओं के व्यास में इपीटैक्सियल वृद्धि के कारण व्यास बढ़ जाता है। द्रव आधारित विधि में पोटैशियम परमैंगनेट के घोल में डालकर







चित्र 17 कार्बन नैनोनलिका में निकुंच एवं क्षेत्र प्रभाव की परस्थिति में धारा-विभव अभिलक्षण

गर्म करने पर गैसीय विधि से ज़्यादा असरदार परिणाम मिले हैं। अन्तर्निवेशन विधि में कॉपर क्लोराइड-पोटैशियम क्लोराइड में मिलाकर गर्म करने से लगभग सारी अशुद्धियों में अन्तर्निवेशन क्रिया द्वारा कॉपर और पोटैशियम के परमाणु जुड़ जाते हैं। कार्बन नलिकाएँ अपनी विशिष्ट संरचना के कारण इन परमाणुओं को अपने अन्दर नहीं आने देतीं। इस प्रकार अन्तर्निवेशित पदार्थों को नैनोनलिकाओं से रासायनिक क्रिया द्वारा अलग कर लिया जाता है।

नैनोनलिका संरचना में निकुंच (किंक) वाले भाग में डायोड जैसे धारा विभव अभिलक्षण देखे गए हैं। निकुंच के ऊपर और नीचे के सीधे भागों में ओमीय चालन के अभिलक्षण प्राप्त हुए हैं। जैसा कि चित्र 17 में दर्शाया गया है, नैनोनलिका में निकुंच के लिए इसके बाहरी और भीतरी तल पर क्रमशः पंचभुजीय एवं सप्तभुजीय आबंधों का होना आवश्यक है। संभवतः इन आबन्धों की उपस्थिति में निकुंच की प्रकृति में डायोड जंक्शन के गुण आ जाते हैं। इसके अतिरिक्त क्षेत्र प्रभाव के कारण डायोड अभिलक्षण में गुणात्मक विस्थापन भी मापा जाता है (चित्र 17 में)। यदि एक सीधे प्रकार की नैनोनलिका (आर्म चेयर) को हेलिकल नैनोनलिका से जोड़ दिया जाए तो भी इनसे डायोड के अभिलक्षण मिलते हैं। नैनोनलिकाओं में यह भी देखा गया है कि इनकी प्रकृति बदलने से धारा में लगभग एक लाख गुणा परिवर्तन संभव है। इस प्रक्रिया को एक स्विच की तरह से उपयोग में लाया जा सकता है।

नैनोनलिका से उत्पन्न इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन का इस्तेमाल करके माइक्रोवेव आवर्द्धक (एम्पलीफायर) का सफल परीक्षण हो चुका है। इन उत्सर्जकों को उच्च धारा घनत्व वाले कैथोड के स्थान पर लगाया गया। नैनोनलिका अनुप्रयोग से बेतार संम्प्रेषण (वायरलेस कम्युनीकेशन) पर भविष्य में अच्छे प्रभाव पड़ने की संभावना है।

कार्बन नैनोनलिका समान आकार की स्टील संरचना से 10 गुना अधिक सामर्थ्यवान पाई गई है। इसके कारण कार्बन नैनोनलिकाओं का प्रबलन (रिइन्फोर्समेण्ट) अनुप्रयोग में एक विशेष स्थान हो सकता है। इन नैनोनलिकाओं के अन्दर अनेक प्रकार की धातु संरचनाओं के निवेश के पश्चात् अगर इनको इपॉक्सी अथवा बहुलकों के साथ मिश्र कर प्रबलन के लिए इस्तेमान किया जाए तो प्रबलन के साथ-साथ अन्य गुण जैसे चुम्बकत्व आदि का भी समावेश आसानी से हो सकता है।

7. उपसंहार

फुलरीन एवं कार्बन नैनोनलिका की दोषरहित संरचनाओं के अनेक अनुप्रयोग खोजे जा चुके है और आगे प्रगति की गति तेज हो रही है। निर्माण विधियों के बेहतर रूप की जानकारी से इन मूल्यवान संरचनाओं की लागत कम करने के सतत प्रयास किए जा रहे हैं। नैनोनलिका आधारित समतल पटल प्रदर्श की कोरियाई सफलता से प्रभावित होकर अनेक निर्माणकर्ताओं का ध्यान इस ओर आकर्षित हो रहा है। निम्न ताप निर्माण विधि के विकास से फुलरीन एवं कार्बन नैनोनलिका आधारित अनुप्रयोगों में आशातीत वृद्धि होगी। नैनोटक्नॉलॉजी के क्षेत्र में फुलरीन तथा नैनोनलिका

आधारित सूक्ष्म परिपथों से 'नैनोचिप' की परिकल्पना को साकार होने में अब ज़्यादा समय शायद न लगे। नैनोनलिकाओं के कड़े परन्तु लचीले गुणधर्म को 'नैनोबॉट' के हाथ की उंगलियों की तरह इस्तेमान करने की संभावनाएं जोर पकड़ रही हैं। नैनोसंरचनाओं की उत्प्रेरक क्षमता के आधार पर स्वतः निर्माण की अवधारणा को भी परखा जा सकता है। इस विषय पर आज जो परिकल्पनाएं लग रही हैं कालान्तर में मूर्तरूप में साकार हो जाएंगी। इस प्रकार इस क्षेत्र से जुड़ी संभावनाओं में नए-नए आयाम जुड़ते जाएंगे।

निर्देश

1. ड्रेसेलहाउस, एम. एस. ड्रेसेलहाउस, जी. तथा एकलुंड, पी. सी., : 'फुलरीन एवं कार्बन नैनोनलिकाओं का विज्ञान', अकैडेमिक प्रेस, लन्दन, 1996.

2. एबेसेन, डी. डब्ल्यू. , संपादक, 'कार्बन नैनोनलिकाएं - निर्माण एवं गुणधर्म', सी. आर. सी. प्रेस, न्यूयार्क, 1997.

3. योशिमुरा, एस. तथा चॉग, आर. पी. एच. , संपादक, 'सुपरकार्बन-संश्लेषण, गुणधर्म एवं अनुप्रयोग', स्प्रिंगर-वॅरलाग, बर्लिन, 1998.

4. सैतो, आर., ड्रेसेलहाउस, जी. तथा ड्रेसेलहाउस, एम., 'कार्बन नैनोनलिकाओं के भौतिक गुणधर्म', इम्पीरियल कॉलेज प्रेस, लंदन, 1998.

5. शीना, जे., वारदनी, ज़ेड. वी. तथा कफाफी, ज़ेड. एच., संपादक, 'फुलरीन तथा फुलरीन आधारित पदार्थों के प्रकाशिक एवं इलेक्ट्रॉनीय गुणधर्म, मार्केल डेकर इंक., न्यूयॉर्क, 2000.

6. टेक्नॉलॉजी एण्ड बिजनेस, सांइटिफिक अमेरिकन, जून 2000.

7. टाइम, जून 19, 2000.

8. इलेक्ट्रॉनिक्स टुडे, 32, नं० 10, मई 2000.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 4, October 2000.

फोर्बुश ह्रास घटना तथा सम्बद्ध भूचुम्बकीय विक्षेपों का अध्ययन

सुभाष चन्द्र कौशिक
भौतिकी विभाग, शासकीय स्नातकोत्तर महाविद्यालय, सीधी (म० प्र०)

[प्राप्त - सितम्बर 6, 1999]

सारांश

कास्मिक किरणों की तीव्रता में क्षणिक ह्रास कई दिनों तक चलने वाली मन्द पूर्वस्थिति (recovery) को फोर्बुश ह्रास घटना कहा जाता है। 8 अप्रैल से 20 अप्रैल 1990 के मध्य ऐसा ही बड़ी फोर्बुश ह्रास घटना का अवलोकन किया गया जो सौर चुम्बकीय ध्रुवण उत्क्रमण की अवधि में सौर चक्र 22 में घटित होती है। फोर्बुश ह्रास का शुभारम्भ 8-9 अप्रैल 1990 को हुआ और 9 अप्रैल को महत्तम को प्राप्त हुआ। तत्पश्चात् दीर्घकालीन पूर्वस्थिति प्रावस्था शुरू हुई जो 20 अप्रैल तक चली। यह भी उल्लेखनीय है कि तीन क्रमिक तूफान 9, 12 तथा 17 अप्रैल 1990 को आये। इतना ही नहीं, Dst मानों में ह्रास आया। भूचुम्बकीय सूचकांक A_E भी 9 अप्रैल 1990 को एकाएक बढ़ते देखा गया। कास्मिक किरणों के ह्रास के साथ ही घटित होने वाले अन्तर्ग्रहीय/भूचुम्बकीय विक्षोयों की विवेचना करने का प्रयास किया गया है जिस दौरान सौर चुम्बकीय ध्रुवता का उत्क्रमण हुआ।

Abstract

The study of Forbush decrease event and associated geomagnetic disturbances. *By* Subhash C. Kaushik, Department of Physics, Government P. G. College, Sidhi (M.P.).

Transient decrease in cosmic ray intensity followed by a slow recovery typically lasting for several days is identified as Forbush decrease event. One such large Forbush decrease event has been oberved from April 8-20, 1990, which occurs during the period of solar

magnetic polarity reversal in solar cycle 22. The onset of Forbush decrease took place on April 8-9, 1990 and attained its maxim on 9th April, 1990. After that the long recovery phase started which continued up to 20th April, 1990. It is noteworthy that the three successive events of sudden storm commencements (SSC's) occurred on 9, 12 and 17th April, 1990, which cover total time span of Forbush decrease events. Further, a sudden decrease in Dst values in similar pattern of cosmic rays and Dst values. The geomagnetic index A_E has also been observed to increase abruptly on April 9, 1990. An attempt has been made to explain the cosmic ray decrease alongwith the interplanetary/geomagnetic disturbances that occurred during which there was a solar magnetic polarity reversal.

फोर्बुश ह्रास (Fd) कास्मिक किरण तीव्रता के क्षणिक ह्रास हैं जिसके बाद कई दिनों तक मन्द गति से पूर्व स्थिति प्राप्त होती है। 1938 में जब फोर्बुश ने कास्मिक किरण तीव्रता में ऐसे ह्रास की खोज की, तब से अनेक शोधकर्ता सूर्य से निःसृत क्षेत्रों तथा प्रवाहों में ऐसे ह्रासों के कारण की खोज में लगे रहे हैं।[1-4] बरूच तथा बर्लगा[5] ने अन्तर्ग्रहीय अवकाश में उच्च चुम्बकीय क्षेत्रों (ब्लाबों) को फोर्बुश ह्रास से सम्बद्ध बताया है। इतना ही नहीं, यह भी दिखलाया जा चुका है कि ये कास्मिक किरण ह्रास न तो प्रक्षोभ से, न ही क्षेत्र में यादृच्छिक गतियों से सम्बन्धित हैं। फोर्बुश ह्रास उत्पन्न करने के लिए अन्तर्ग्रहीय अवकाश में उच्च क्षेत्र शक्ति के भाग ही उत्तरदायी हैं।

ये क्षेत्र अन्तर्ग्रहीय चुम्बकीय लूपों (गुच्छों), क्रमबद्ध क्षेत्र सांस्थितिकी (टोपोलाजी) के बादलों से जो सक्रिय सौर क्षेत्रों से बहिष्कृत होते हैं, अन्तर्ग्रहीय आघातों के अपेक्षतया क्रमबद्ध क्षेत्र संरचना वाले, प्रक्षुब्ध क्षेत्र आघातों के परिवेश, कोराटैटी उच्च वेग सरिताएँ या केवल स्पर्शीय असांतत्य वाले होते हैं।[1, 6] वैज्ञानिकों ने फ़ोर्बुश ह्रास के लिए नाना प्रकार की क्रियाविधियाँ प्रस्तावित की हैं। वे ह्रास की पहचान ब्लास्ट तरंग के अग्रभाग से परावर्तन[7] कणों के विक्षेपण को क्रमबद्ध क्षेत्र संरचनाओं की विस्तृत संरचना,[6] क्रमबद्ध संरचनाओं के आघातों के परिवेश में प्रवण[3], ड्रिफ्ट[5,8] तथा आघात अग्रभाग तथा चुम्बकीय बादलों के मध्य प्रक्षुब्ध क्षेत्र भाग में कणों के विकीर्णन के रूप में करते हैं।[9, 10] इस प्रपत्र में हमने 8-20 अप्रैल 1990 के फोर्बुश ह्रास घटना का अध्ययन अन्तर्ग्रहीय प्लाज्मा प्राचलों के विचरण के प्रति किया है। विभिन्न शोधकर्ताओं ने स्थापना की है कि ये ह्रास अन्तर्ग्रहीय दशा में प्रक्षोभों के कारण उत्पन्न होते हैं और ये प्रक्षोभ आघात तरंगों, कोरोना के द्रव्यमान निष्कासन, सौर ज्वालाओं, उच्चवेग सौर वात धाराओं से उद्भूत होते हैं।[11-14] हाल ही में इफेडिली ने[15] संकेत किया है कि मंदाकिनीय कास्मिक किरणों का सूर्य गोलीय संचरण चुम्बकीय क्षेत्र की ध्रुवता से स्वतन्त्र होता है। यह प्रपत्र कास्मिक किरण ह्रास तथा अन्तर्ग्रहीय विक्षेपों की खोज के विषय में है जो 8-20 अप्रैल 1990 की अवधि में घटित हुए। यह अवधि ऐसी थी जिसमें सौर चुम्बकीय ध्रुवता का उत्क्रमण हुआ।

प्रयोगात्मक

आँकड़ों का विश्लेषण

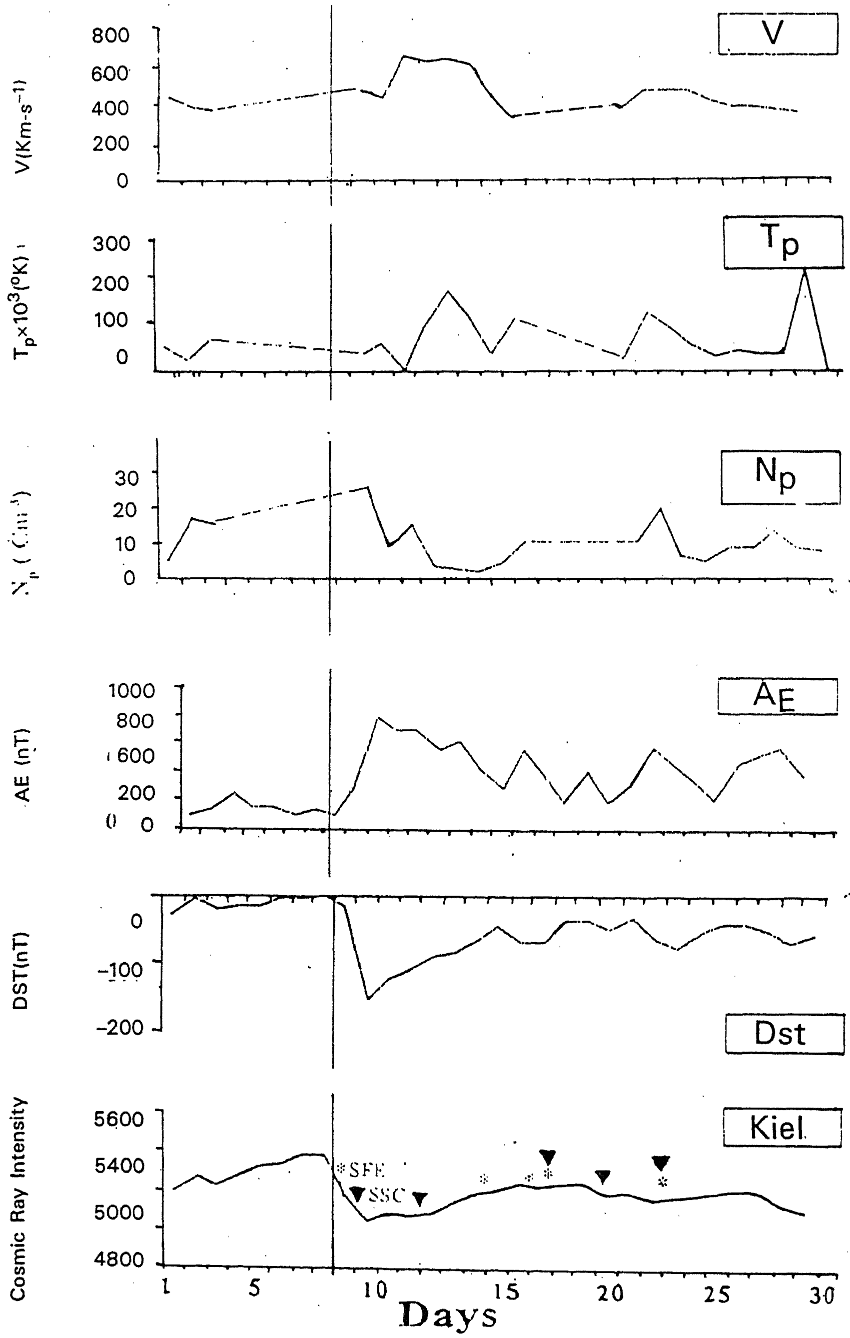
फोर्बुश ह्रास (Fd) घटना की पहचान नागोया यूनिवर्सिटी, जापान द्वारा संकलित और प्रकाशित कास्मिक किरण तीव्रता के प्रति घंटे के आलेखों (प्लाटों) से की जाती है। कास्मिक किरण तीव्रता के दैनिक मान कील सुपरन्यूट्रान मानिटर से प्राप्त किये जा सकते हैं। इस अध्ययन में 8 अप्रैल 1990 की बृहद फोर्बुश ह्रास घटना की खोज करने के लिए भूचुम्बकीय सक्रियता के सम्बन्ध में अन्तर्ग्रहीय चुम्बकीय क्षेत्र (IMF)घटकों को सौर वात प्लाज्मा आँकड़ा (डेटा) सहित IAU पर इंटरप्लैनेटरी मानिटरिंग प्लैटफार्म (IMP-8) उपग्रह से प्राप्त किये गये। ये आँकडे नेशनल स्पेस साइंस डेटा सेंटर द्वारा प्रदान किये गये। रिंगकरेंट इंडेक्स Dst माप, जो 1964 में लागू हुए, प्रारम्भिक रूप में रिंग करेंट चुम्बकीय क्षेत्र का मापन करते हैं। A_E की परिभाषा 1966 में डैविस तथा सुगिउरा ने दी। यह आरोरा इलेक्ट्रोजेटों में विचरण मापता है[-16]। इन सूचकांकों का प्रयोग करके निम्न अक्षांश तथा उच्च अक्षांश प्रभावों की खोज की जा सकती है। भूचुम्बकीय Dst तथा A_E सूचकांक के दैनिक मानों का उपयोग भूचुम्बकीय सक्रियता के साथ कास्मिक किरणों के सम्भव सम्बन्ध को प्राप्त करने में किया जाता है।

परिणाम तथा विवेचना

जिस तरह फोर्बुश ह्रास में लाक्षणिक समय दिनों में होता है[5], हमने कीन न्यूट्रान मानिटर द्वारा 1 से 30 अप्रैल 1990 तक रिकार्ड की गई कास्मिक किरण तीव्रता के दैनिक माध्यमानों का प्रयोग किया है जो दाब के लिए संशोधित हैं। चित्र 1 में परिणामों को दिखाया गया है जो अप्रैल 1990 के लिए प्रत्येक दिन के लिए हैं। चित्र का अधोपैनेल कास्मिक किरण तीव्रता विचरण को प्रदर्शित करता है, जबकि द्वितीय तथा तृतीय पैनल क्रमशः भूचुम्बकीय सूचकांक A_E तथा Dst को प्रदर्शित करते हैं। शेष ऊपरी पैनेल अन्तर्ग्रहीय प्राचलों के दैनिक मानों को - यथा सौर वात प्लाज्मा घनत्व Np, ताप Tp तथा वात वेग V को क्रमशः प्रदर्शित करते हैं।

चित्र 2 में अन्तर्ग्रहीय चुम्बकीय क्षेत्र तथा इसके घटकों को Bx, By तथा Bz से प्रदर्शित किया गया है। 8-20 अप्रैल 1990 के मध्य क्षणिक ह्रास देखा जाता है। ह्रास का महत्तम आयाम प्राप्त हो लेने पर कुछ दिनों में यथास्थिति प्राप्त होती है।

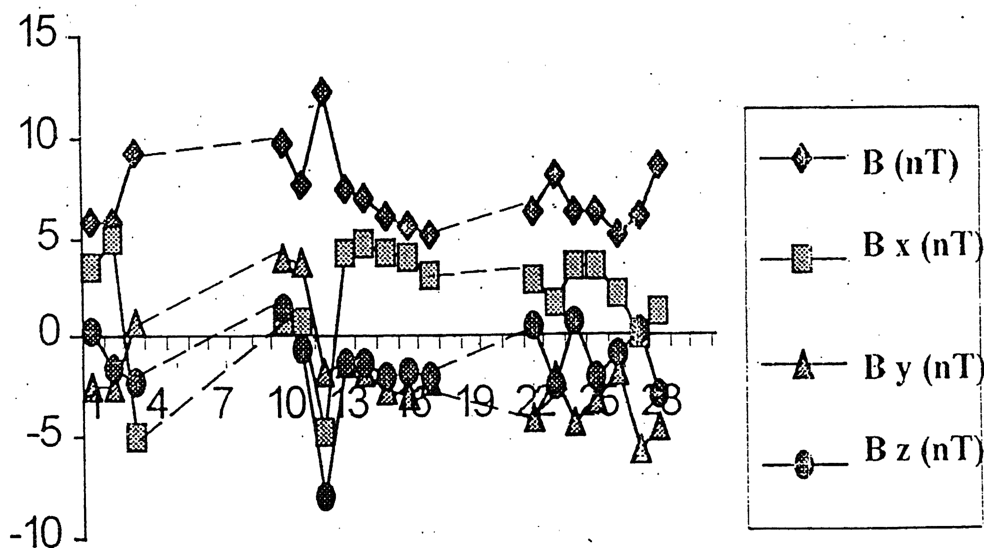
Fd का अधिकतम आयाम कील स्टेशन के लिए ~6.5%है। हमने 8 अप्रैल 1990 को सहसा एक तूफान की शुरुआत विशाल और ज्वाला देखी जिन्हें चित्र में अंकित किया गया है। इस सौर ज्वाला का सम्बन्ध NOAA सक्रिय क्षेत्र 6007 (N24E20) से जोड़ा जाता है। सहसा तूफान की शुरुआत (SSC) जो 9 अप्रैल 1990 को 8 बजे UT हुई वह पृथ्वी पर अन्तर्राष्ट्रीय आघात तरंग के आगमन की सूचक है। आघात आगमन समय IMF तीव्रता तथा सौर वात प्लाज्मा वेग में सहसा



चित्र 1 : मास अप्रैल 1990 के लिए दिन-प्रति-दिन के आधार पर कास्मि किरणें (कील न्यूट्रान), भूचुम्बकीय Dst, AE सूचकांक, सौर वात प्लाज्मा प्राचलों - आयन घनत्व, प्रोटान ताप तथा वेग आलेखित किये गये हैं।

वृद्धि के साथ साथ घटित हुई। फोर्बुश ह्रास के दौरान IMF तथा प्लाज्मा वेग में वर्धित स्तर पर प्रेक्षण पार्कर के मॉडल (1963) से मेल खाते हैं।[7] SSC घटना का होना भी क्रास्मिक विकिरण तीव्रता में न्यूनतम ह्रास के समय देखा जाता है।

सौर ज्वालाओं तथा SSC की अन्य घटनाएँ फोर्बुश ह्रास की पुनर्प्राप्ति अवधि के दौरान देखी जाती हैं जो अप्रैल 1990 के अन्त तक पहुँचते कास्मिक किरण में और आगे अवगमन ला सकती हैं। फोर्बुश ह्रास के शुरू होने के समय ही IMF तीव्रता तथा सौर वात प्लाज्मा घनत्व बढ़ जाते हैं। अन्तर्ग्रहीय चुम्बकीय क्षेत्र B तथा इसके घटक (B_x, By, Bz) के दैनिक मान Fd के शुरू होने के आसपास ही प्राप्त होते हैं। इस घटना में B उच्च होता है और Bx अत्यधिक न्यून।



चित्र 2 : अन्तर्ग्रहीय चुम्बकीय क्षेत्र B तथा इसके घटकों Bx, By, Bz को मास अप्रैल 1990 के लिए दिन-प्रति-दिन के आधार पर आलेखित किया गया है।

अन्य दो घटक By (पश्चिम की ओर) तथा Bz (दक्षिण की ओर) B_x से उच्चतर पाये जाते हैं। SSC की घटना से Bz और भी बढ़ जाता है। B, By, Bz घटकों में ऐसी वृद्धियाँ अन्तर्ग्रहीय क्षेत्र में, जिसमें कास्मिक किरणें विसरण संवहन अवस्था में या पाशित अवस्था में होती हैं, बड़े अवनमनों को सूचित करती हैं। इस प्रपत्र में दिये गये प्रेक्षण इस संकल्पना के अनुरूप हैं कि फोर्बुश ह्रास वर्धित उच्च तीव्रता विपुल अन्तर्ग्रहीय चुम्बकीय क्षेत्र द्वारा उत्पन्न होते हैं[5]। हम देखते हैं कि पूर्व अवस्था की प्राप्ति ह्रास के तुरन्त बाद (~ 18 घंटे) होने लगती है और न्यूनतम कास्मिक किरण ह्रास के 7 दिनों के भीतर पूरी हो जाती है। दूसरा कास्मिक किरण ह्रास 17 अप्रैल 1990 को 24 घंटे तक देखा जाता है जो पिछले दिन सौर ज्वाला घटना के बाद इसकी तीव्रता 16 घंटे लेकर

पूर्वावस्था प्राप्त करने लगती है। इसके बाद दो अन्य सौर ज्वाला घटनाएँ तथा एक सहसा तूफान की शुरुआत होती है।

भूचुम्बकीय Dst तथा A_E सूचकांकों में उल्लेखनीय उतार-चढ़ाव देखे जाते हैं। ये दोनों फोर्बुश ह्रासों की अवधि में भिन्न विचरण प्रदर्शित करते हैं। Dst सूचकांक का मान फोर्बुश ह्रास की ही तरह क्षणिक ह्रास प्रदर्शित करता है। निम्न अक्षांशों पर रिकार्ड किया गया भूचुम्बकीय विक्षोभ सूचकांक Dst, जो पश्चिम से बहती मंडलीय धारा प्रणाली से आता है, जिसे रिंग करेंट (वलय धारा) कहते हैं तथा दूसरा भूचुम्बकीय सूचकांक A_E, जो मध्य अक्षांशों में भूचुम्बकीय क्षेत्र उतार-चढावों को दर्शाता है, यह मान लिया गया है कि चुम्बकीय मंडल का अत्यधिक संपीडन तथा चुम्बकीय मंडलीय धारा तन्त्र का बड़े पैमाने पर तीव्रीकरण जो Dst तथा A_E में देखा जाता है, उससे पृथ्वी के निकट कास्मिक किरण मापन पर भूचुम्बकीय प्रभाव पड़ता है।

तूफान 9 अप्रैल को शुरू हुआ तथा सौर ज्वाला 8 अप्रैल को शुरू हुई, जो सबसे बड़ी ज्वाला थी और जिसकी महत्ता 2N थी। तीव्र भूचुम्बकीय तूफान, जिसकी माप 278nT थी, 10 अप्रैल को आया जिसके Dst सूचकांक में उग्र परिवर्तन उत्पन्न हुआ। इस तरह के सौर तथा भूचुम्बकीय/अन्तर्ग्रहीय परिवर्तन अप्रैल 1990 के वृहत फोर्बुश ह्रास के पीछे उत्पन्न हो सकते हैं।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक WDC-2 के प्रो० जे० एच० किंग को धन्यवाद देता है, जिन्होंने अन्तर्ग्रहीय आँकड़े तथा प्रति घंटे न्यूट्रान घनत्व ग्राफ़ प्रदान किये। यह शोधकार्य को विश्वविद्यालय अनुदान आयोग से सहायता प्राप्त है।

सन्दर्भ

1. फोर्बुश , एस. ई. : Phys. Rev., 1938, 54, 975.
2. मैकडानेल्ड, एफ. बी., लाल, एन. इत्यादि Astrophys. J. 1981, 249, L 71
3. पर्को, जे. एस. तथा फ्रिस्क, एल. ए. : J Geophys. Res., 1983, 88, 9033.
4. वेंकटेसन, डी, डेकर, आर. बी., क्रिमिगिस, एस. एम. : J. Geophys. Res., 1985, 90, 2905.
5. बरूच, ई. तथा बरलग, एल. एफ. : J. Geophys. Res. 1975, 80, 449.
6. सैंडरसन, टी. आर. इत्यादि : Proceedings of 21th International Cosmic Ray Conference, Adelaide, 1990, 6, 251.
7. पार्कर, ई. एन. : Interplanetary Dynamical Processes, Interscience, John Wiley & Sons, New York, 1963.

8. सारिस, ई. टी., डोडोपूलास, सी. ए. तथा वेंकटेसन, डी. : Solar Phys., 1989, 120 153.

9. निशिडा, ए. : J. Geophys. Res., 1982, 87, 6003.

10. झंग, जी. तथा बरलग, एल. एफ. : J. Geophys. Res., 1988, 93, 2511.

11. जोसेलिन, जे. : Proceedings of Chapman Conference on Solar-Wind Magnetosphere Coupling, 1986, 127.

12. श्रीवास्तव, पी. के. तथा शुक्ल, आर. पी. : Solar Phys., 1994, 154, 177.

13. केन, एच. वी तथा रिचर्डसन, आई. जी. : J. Geophys. Res. 1995, 100, 1755.

14. कौशिक, एस. सी. तथा श्रीवास्तव, पी. के. : Bull. Astron. Soc. India, 1999, 21, 385.

15. इफेडिली : Solar Phys., 1998, 180, 487.

16. मयौड, पी. एन. : Geophysical Monograph, AGU, Washinston DC, 1980, 22.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 4, October 2000.

युगलतः फजी α-संतत प्रतिचित्रण

आर० के० सराफ
गणित विभाग, शासकीय कमला नेहरू कन्या महाविद्यालय, दमोह (म० प्र०)
तथा
एम० खन्ना
गणित विभाग, शासकीय कन्या महाविद्यालय, जबलपुर (म० प्र०)

[प्राप्त -मार्च 2, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में युगलतः फजी α- संतत प्रतिचित्रणों, युगलतः फजी अर्ध विवृत सेट तथा युगलतः फजी सघन सेटों के गुणों का अध्ययन किया गया है।

Abstract

Pairwise fuzzy α-continuous mappings. *By* R. K. Saraf, Department of Mathematics, Government Kamla Nehru Girls College, Damoh, (M.P.) and M. Khanna, Department of Mathematics, Government Girls College, Jabalpur (M.P.).

In this paper some characterizations and properties of pairwise fuzzy α-continuous mappings, pairwise fuzzy semi-open set and pair-wise fuzzy dense sets have been studied.

1. प्रस्तावना

जादेह[6] द्वारा प्रचलित किये गये फजी सेट की मूलभूत विचारधारा के आधार पर फजी गणित की नई शाखाएँ निर्मित होती हैं। चैंग ने[4] फजी सांस्थितिक समष्टि की संकल्पना प्रचलित की। कैंडिल[1] ने फजी सांस्थितिक समष्टियों में अर्धविवृत के विचार की परिभाषा दी और ठाकुर तथा मालवीय[7] ने अर्धविवृत विचार को फजी द्विसांस्थितिक सेटिंग तक विस्तृत किया। बिन शाहना ने[3] फजी सांस्थितिक समष्टियों में α-सेटों तथा α-संतत प्रतिचित्रणों का विचार प्रचलित किया। हाल ही में सम्पत कुमार[8] ने α–सेटों तथा α-संतत प्रतिचित्रणों के विचार का सार्वीकरण फजी

द्विसांस्थितिक समष्टियों में किया है। प्रस्तुत प्रपत्र में हमने युगलतः सघन सेट, युगलतः फजी अर्ध विवृत सेटों तथा युगलतः फजी α-संतत प्रतिचित्रणों के कुछ गुणों को प्राप्त किया है।

2. प्रारम्भिक बातें

माना कि X एक अरिक्त सेट है और $I = [0, 1]$ X में फजी सेट प्रतिचित्रण है X से I में। शून्य फजी सेट O X से I में प्रतिचित्रण है जो केवल 0 शून्य ग्रहण कर सकता है। फजी सेट 1 प्रतिचित्रण है X से I में जो केवल 1 मान ग्रहण करता है। संयोग UA (resp. intersection $\cap A\alpha$) जो कि X के फजी सेटों का परिवार $(A_\alpha : a \in A)$ है उसे प्रतिचित्रण Sup A_α (resp. Int A) के रूप में परिभाषित किया जाना है। X का फजी सेट A जो X के फजी सेट B में अन्तर्निहित है उसे $A \le B$ द्वारा प्रदर्शित करते हैं तब जबकि प्रत्येक $x \in X$ के लिए $A(x) \le B(x)$। फजी सेट A का पूरक A^c (या $1 - A$) है जिसे प्रत्येक $x \in X$ के लिए $1 - A(x)$ द्वारा परिभाषित करते हैं। माना कि $f: X \to Y$ एक प्रतिचित्रण है। यदि A फजी सेट हो X का तो $f(A)$ फजी सेट है Y का जिसे निम्नांकित द्वारा परिभाषित किया जाता है।

$$f(A)\ (Y) = \begin{cases} \operatorname{Sup}\limits_{x \in f^{-1}(y)} A(x) \quad \text{यदि} & f^{-1}(y) \neq 0 \\ 0 & (y \in X) \\ & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

यदि B फजी सेट है Y का तो $f^{-1}(B)$ X का फजी सेट है जो प्रत्येक $x \in X$ के लिए $f^{-1}(B)(x) = B(f(x))$ द्वारा परिभाषित होता है।

इस पूरे प्रपत्र में हम (X, τ_1, τ_2) द्वारा फजी द्विसांस्थितिक समष्टियों को सूचित करेंगे। किसी उपसेट A के लिए τ – Int A तथा τ_1 – Cl A बताता है A के फजी आन्तरिक तथा A के फजी घेराव को जो τ_1 (i = 1, 2) के प्रति है। (X, τ_1, τ_2) का फजी उपसेट A *(i, j)* फजी अर्ध-विवृत सेट (resp. (i, j) – Fuzzy α -open set) कहलाता है यदि $A \le \tau_1 - \mathrm{Cl}(\tau_1 - \mathrm{Int}\, A)$ (resp. $A \le \tau_1 - \mathrm{Int}(\tau - \mathrm{Cl}(\tau - \mathrm{Int}\, A)))$, i, j = 1, 2, $i \neq j$)। प्रत्येक (i, j) फजी α- विवृत सेट *(i, j)* फजी अर्ध विवृत है किन्तु इसका विलोम सही नहीं हो सकता[7]। X के सारे उपसेटों का सेट, जो X में *(i, j)* फजी अर्ध विवृत सेट है (resp. (i, j) – fuzzy α-open sets) वे (i, j) – FSO (X) (resp. (i, j) – F α (X) द्वारा प्रदर्शित किये जावेंगे।

परिभाषा 2.1 [7] : माना कि (X, τ_1, τ_2) एक फजी द्विसांस्थितिक समष्टि है। *(i, j)* अर्ध घेरे को *(i, j) - sCl* द्वारा X के फजी सेट A के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है। उसे निम्नवत् परिभाषित किया जाता है -

(i, j) – SCl = Inf { B : B ≥ A, B (i, j) फजी अर्धसंवृत है।

परिभाषा 2.2 : [7] माना कि (X, τ_1, τ_2) एक फजी द्विसांस्थितिक समष्टि है। *(i, j)* अर्ध आंतरिक जिसे *X* के फजी सेट *A* के *(i, j) - sin t* द्वारा प्रदर्शित किया जाता है और निम्नवत् परिभाषित किया जाता है- $(i, j) - \text{sint } A = \text{Sup }\{B : B \leq A, B\ (i, j)$ है (i, j) फजी अर्ध-विवृत है।

3. युगलतः फजी (अस्पष्ट)α-सांतत्य

परिभाषा 3.1 : [8] : प्रतिचित्रण $f : (X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \tau_1, \tau_2)$ को युगलतः फजी α - संतत कहा जाता है (resp. pairwise fuzzy semi continuous) यदि *Y* के प्रत्येक τ_i फजी विवृत सेट का विलोम प्रतिबिम्ब *X* में प्रत्येक $i, j = 1, 2, i \neq j$ के लिए एक *(i, j)* - फजी α - विवृत है।

टिप्पणी 3.1 : प्रत्येक युगलतः α- संतत प्रतिचित्रण है युगमतः फजी अर्ध संतत है किन्तु इसका विलोम सत्य नहीं भी हो सकता।[7]

परिभाषा 3.2 : समष्टि (X, τ_1, τ_2) का फजी-उपसेट *B* युगलतः फ़ज़ी सघन कहा जाता है कि *X* का प्रत्येक अरिक्त फजी उपसेट परिच्छेद हो एक τ_1 - फ़ज़ी विवृत तथा *X* का τ_2- फजी विवृत सेट रखता हो *Y* के साथ अरिक्त परिच्छेद।

प्रमेय 3.1 : माना कि (X, τ_1, τ_2) एक फजी द्विसांस्थितिक समष्टि है, $\gamma \leq X$ युगलतः फजी सघन सेट है। यदि *A* - अरिक्त τ_i- फजी विवृत सेट *(i = 1, 2)* हो तो $A \cap \gamma \neq 0$

उपपत्ति : माना कि $A\ \tau_i$ -फ़ज़ी विवृत सेट है। $X \in \tau\ (j = 1, 2, i \neq j)$ अतः $A \cap X = A \neq 0$ चूँकि γ युगलतः फजी सघन सेट $A \cap \gamma \neq 0$।

प्रमेय 3.2 : माना कि (X, τ_1, τ_2) फजी द्विसांस्थितिक समष्टि है। माना कि *A* तथा *B* फजी उपसेट हैं *X* के 1 यदि *A* एक τ_j के प्रति τ_i- फ़ज़ी अर्धविवृत सेट हो तथा *B* युगलतः फजी सघन सेट हो तो $\tau_j - \text{CIA} \leq \tau_j - \text{CI}\ (A \cap B)\ i, j = 1, 2, i \neq j$

उपपत्ति : यदि *A* रिक्त सेट हो तो उपपत्ति स्पष्ट है। माना कि $A \neq 0$। चूँकि $A\ \tau_j$ के प्रति τ_i- फजी अर्धविवृत सेट है तो एक τ_i-फजी विवृत सेट A_i इस तरह विद्यमान है कि $A_i \leq A \leq \tau_j - \text{CI}\ A_i$ अतः $A_i \neq 0$ यदि $A_i = 0$ होता तो $\tau_i - \text{CIA}_i = 0$। यह विरोधाभास होगा। चूँकि *B* युगलतः फजी सघन सेट है तो $A \cap B \neq 0$ अतः $A \cap B \neq 0$। अब माना कि *C* है τ_j-फ़ज़ी विवृत प्रतिवेश X_β तथा $X_\beta \in \tau_j - \text{CIA}$ का। चूँकि *A* है τ_i -फजी अर्धविवृत सेट है τ_i के प्रति अतः $X_\beta \in \tau_j - \text{CI}\ (\tau_i - \text{Int } A)$। इसका अर्थ हुआ कि $C \cap \tau_i - \text{Int } A \neq 0$

चूँकि *B* युगलतः फजी सघन सेट है अतः $C \cap \tau_i - \text{Int } A \cap B \neq 0$। इससे $A \cap B \cap C \neq 0$ प्राप्त होता है। अतः $X_\beta \in \tau_j - \text{CI}\ (A \cap B)$। इस तरह प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

प्रमेय 3.3 : माना कि (X, τ_1, τ_2) एक फजी द्विसांस्थितिक समष्टि है $A \leq X$। यदि $B \in (i, j) - F\ \alpha\ (X)$ तो $A \cap B \in (i, j) - F\ \alpha\ (A)$ निम्नांकित दशाओं में से प्रत्येक में $(i, j = 1, 2, i \neq j)$,

(a) A युग्मशः फजी सघन सेट है

(b) $A \in \tau_1 \cap \tau_2$

(c) $\tau_i \leq \tau_j$ तथा $A \in (i, j) - F\alpha(X)$

उपपत्ति : (a) माना कि $B \in (i, j) - F\alpha(X)$ तो हमें प्राप्त होता है,

$$B \leq \tau_i - Int(\tau_i - Cl(\tau_i - Int B))$$

तो

$$A \cap B \leq A \cap [\tau_i - Int\{\tau_j - Cl(\tau_i - Int B))]$$

$$= \tau_{iA} - Int[A \cap (\tau_i - Int(\tau_i - Cl(\tau_i - Int B)))]$$

$$\leq \tau_i - Int[A \cap (\tau_i - Cl(\tau_i - Int B))]$$

प्रमेय 3.2 से हमें प्राप्त होता है-

$$A \cap B \leq \tau_{iA} - Int(A \cap (\tau_j - Cl(\tau_i - Int B \cap A)))$$

$$= \tau_{iA} - Int(\tau_{jA} - Cl(\tau_i - Int B \cap A))$$

$$= \tau_{iA} - Int(\tau_{jA} - Cl(\tau_{iA} - Int(\tau_i - Int B \cap A)))$$

$$\leq \tau_{iA} - Int(\tau_{jA} - Cl(\tau_{iA} - Int B \cap A))$$

इस तरह उपपत्ति पूर्ण हुई।

दशा *(b)* तथा *(c)* में उपपत्ति सरल है।

प्रमेय 3.4 : यदि $f: (X, \tau'_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \tau'_1, \tau'_2)$ युगलतः α- फ़ज़ी - संतत है और A युगल फजी सघन सेट है तो प्रतिबन्ध f/A युगलतः फजी α-संतत है।

4. *(i, j)*- फ़ज़ी अर्धविवृत सेटों के गुण

प्रमेय 4.1 : एक फ़ज़ी द्वि-सांस्थितिक समष्टि (X, τ_1, τ_2) में निम्नांकित समतुल्य हैं

(a) A एक (i, j)–फजी अर्धविवृत सेट है।

(b) $\tau_j - Cl\ A = \tau_j - Cl\ (\tau_i - Int\ A)$

(c) $\tau_i - Int\ (A^c) = \tau_i - Int\ (\tau_j - Cl\ A^c)$

उपपत्ति : (a) $\Rightarrow$ (b)। चूँकि *A* है *(i. j)* फजी अर्धविवृत सेट, $A \leq \tau\iota - Cl\ (\tau_j - Int\ A)$। चूँकि *A* का घेरा *A* के युक्त लघुतम संवृत सेट है

$$\tau_j - Cl\,A \leq \tau_j - Cl\,(\tau_i - Int\,A)$$

दूसरी ओर $t_i - Int\,A \leq A$ या $t_j - Cl\,(\tau_i - Int\,A) \leq \tau_j - Cl\,A$

इस तरह $(\tau_j - Cl\ A) = \tau_j - Cl\ (\tau_i - Int\ A)$

(b) $\Rightarrow$ (a) संकल्पना से हमें प्राप्त है

$$\tau_i - Int\,A \leq A \leq \tau_j - Cl\,A = \tau_j - Cl\,(\tau_i - Int\,A)$$

इसका अर्थ हुआ कि $\tau_i - Int\,A \leq A \leq \tau_j - Cl\,(\tau_{i_}\ Int\,A)$

$\tau_i - Int\ A = B$ रखने पर जो कि फज़ी τ_i -विवृत सेट है, हमें प्राप्त होता है कि *A* *(i, j)* फजी अर्धविवृत है

(a) <=> (c) को इसी तरह सिद्ध किया जा सकता है।

प्रमेय 4.2 : [7] माना कि $A \leq Y \leq X$, जहाँ (X, τ_1, τ_2) एक फजी द्विसांस्थितिक सेट है तथा (Y, τ'_1, τ'_2) है $(X, \tau_1, \tau_2,)$ का उपसमष्टि। माना कि *A X* में *(i, j)* - फजी अर्धविवृत सेट है तो *A* *Y* के फजी उपसमष्टि में *(i, j)* - फजी अर्धविवृत भी है।

टिप्पणी 4.1 : उपर्युक्त प्रमेय का विलोम सत्य नहीं है। चूँकि *(i, j)* फजी अर्धविवृत सेट तथा एक फजी विवृत सेट का परिच्छेद *(i, j)* फजी अर्धविवृत सेट नहीं है। किन्तु उपर्युक्त प्रमेय में थोड़ा परिवर्धन करने से एक आवश्यक तथा पर्याप्त प्रतिबन्ध प्राप्त होता है।

प्रमेय 4.3 : माना (X, τ_1, τ_2) एक फजी द्विसांस्थितिक समष्टि है और Y एक τ_1-फजी विवृत सेट है X में जिससे कि $A \in Y \leq X$ जहाँ A कोई फजी सेट है X में। तब A है (i, j)-फजी अर्धविवृत X में यदि A समष्टि (Y, τ_1', τ_2^1) में (i, j)-फजी अर्धविवृत है।

उपपत्ति : पर्याप्तता के लिए प्रमेय (4.2) से आवश्यकता होती है। माना कि *A* युगलतः फजी अर्धविवृत सेट है *Y* में तो एक τ' फजी विवृत सेट $(B \cap Y)$ विद्यमान रहता है *Y* में जहाँ *B* एक τ_i- फजी विवृत है जिससे कि $B \cap Y \leq A \leq \tau'_1 - Cl\ (B \cap Y)$, किन्तु $B \cap Y$ *X* में τ_i- फजी विवृत है इसलिए $B \cap Y$ युगलतः फजी अर्धविवृत है *X* में। अतः प्रमेय (4.2) के अनुसार *A* है युगलतः फजी अर्धविवृत *X* में।

प्रमेय 4.4 : माना कि *B* फजी द्विसांस्थितिक समष्टि (X, τ_1, τ_2) में फ़ज़ी सेटों का ऐसा याद्दच्छिक समूह है कि

(1) $\tau_i\,(i = 1, 2) \leq B$

(2) यदि $\in B$ तथा $b \leq G \leq \tau_j - CI\,(b)$, तो $G \in B$

तब $(i, j) - FSO\,(X) \leq B$

उपपत्ति : माना कि $A \in (i, j) - FSO\,(X)$ तो *X* में एक τ_i- फजी विवृत सेट इस तरह विद्यमान है कि $H \leq A \leq \tau_j - CI\,H$, (1) से $H \in B$ (2) से $A \in B$ अतः $(i, j) - FSO\,(X) \leq B$.

प्रमेय 4.5 : [7] : (a) *(i, j)* -फजी अर्धविवृत सेट iff $A = (i, j) - \text{sint } A$

(b)A *(i, j)* -फजी अर्धसंवृत सेट iff $A = (i, j) - SCI\ A$

प्रमेय 4.6 : यदि A एक फजी सेट है $(X, \tau_1, \tau_2,)$ में तो $\tau_i - \text{Int}\ A \leq (i, j) - \text{sint}\ A \leq A \leq (i, j) - SCI\ A \leq \tau_i\ A \leq \tau_i - CI\ A$

टिप्पणी 4.2 : [7] : चूँकि *(i, j)*- फजी अर्धविवृत सेट का कोई संयोग *(i, j)*- फजी अर्धविवृत है तथा *(i, j)* फजी अर्धसंवृत सेट का कोई प्रतिच्छेद *(i, j)*-फजी अर्धसंवृत है तो इससे यही निकलता है कि *(i, j) – sint A* है (i, j)-फजी अर्धविवृत तथा *(i, j) – SCI A* है *(i, j)* -फजी अर्धसंवृत *X* में समस्त फजी सेटों *A* के लिए।

प्रमेय 4.7 : $(X, \tau_1, \tau_2,)$ में निम्नांकित परिणाम सत्य हैं -

(1) $(i, j)\ s\ CI\ (0) = 0$

(2) $(i, j) - s\ CI\ ((j, j) - s\ CI\ (A)) = (i, j) - s\ CI\ A$

(3) $(i, j) - s\ CI\ (A \cup B) \cup (i, j) - s\ CI\ A \cup\ (i, j) - s\ CI\ B$

(4) $(i, j) - s\ CI\ (A \cap B) \leq (i, j) - s\ CI\ A \cap (i, j)\ s\ CI\ (B)$

उपपत्ति : (1) तथा (2) स्पष्ट हैं।

(3) *(i, j) – s CI (A ∪ B)* है *(i, j)* -फजी अर्धसंवृत। यही नहीं $(i, j) - s\ CI\ (A \cup B) \geq (i, j) - S\ CI\ A$ तथा $(i, j) - s\ CI\ (A \cup B) \geq (i, j) - S\ CI\ B$ अतः (3) सत्य है।

(4) टिप्पणी 4.2 से $((i, j) - S\ CI\ A \cap (i, j) - s\ CI\ B)$ है (i, j) -फजी अर्धसंवृत। प्रमेय (4.6) से भी हमें $((i, j) - s\ CI\ A \cap (i, j) - s\ CI\ B) \leq A \cap B$ प्राप्त होता है अतः (4) सत्य है। इसी तरह *(i, j)* -फजी अर्धआन्तरिक के लिए उपपत्ति सरल है।

प्रमेय 4.8 :

(1) (i, j) – sint (0) = 0

(2) (i, j) – sint ((i, j) – sint A) = (i, j) sint A

(3) (i, j) – sint (A $\cup$ B) $\leq$ (i, j) – sint A $\cup$ (i, j) – sint B

(4) (i, j) – sint (A $\cap$ B) $\leq$ (i, j) – sint A $\cap$ (i, j) – sint B

प्रमेय 4.9 : यदि *A* (x, τ_1, τ_2) में फजी सेट हो तो (i, j) – sint [(i, j) – s CIA – A] = 0

उपपत्ति : कल्पना कीजिए कि *(i, j) – sint [(i, j) – s CI A – A]* $\neq 0$ अर्थात् कोई (i, j)-फजी अर्धविवृत सेट B $\neq$ 0 इस तरह विद्यमान है कि B $\leq$ (i, j) – s CI A – A। इसका अर्थ हुआ कि τ_i-फजी विवृत सेट *G* का अस्तित्व इस तरह है कि G $\leq$ B $\leq$ (i, j) – s CI A – A।

अपरंच $[(i, j) - s\ CI\ A]^c$ फजी τ_i, विवृत है जिससे $[(i, j) - s\ CI\ A]^c \cup G$ फजी τ_i -विवृत है। इस प्रकार $[((i, j) - s\ CI\ A)^c \cup G]^c = (i, j) - s\ CI\ A \cap G^c = (i, j) - s\ CI\ A - G$। अपरंच A $\leq$ (i, j) – s CI A – G $\leq$ (i, j) – s CI A किन्तु इससे (i, j) – s CI A की परिभाषा का विरोध होता है।

उपप्रमेय 4.10 : (i, j) – sint [(i, j) – s CI A – A] = 0, (X, τ_1, τ_2) में फजी सेट *A* के लिए।

प्रमेय 4.10 : माना कि *A* कोई फजी सेट है (X, τ_1, τ_2) में तो [1 – ((i, j) – s CI A – A)] = 1

प्रमेय 4.11 : माना कि (X, τ_1, τ_2) एक फजी द्वि सांस्थितिक समष्टि है, A $\leq$ X यदि B $\in$ (i, j) F S O (X) तो A $\cap$ B $\in$ (i, j) – FSO (A) निम्नांकित दशाओं में से प्रत्येक में युगलतः फजी सघन सेट है–

(a) A युगलतः फजी सघन सेट है।

(b) $A \in \tau_1 \cap \tau_2$

(c) $\tau_1 \leq \tau_2$

तथा

A $\in$ (i, j) – FSO (X)

प्रमेय 4.12 : यदि $(X, \tau_1, \tau_2) \rightarrow (Y, \tau'_1, \tau'_2)$ एक युगलतः फजी अर्धसंतत सेट है और *B* युगलतः फजी संघन सेट हैं तो *f/B* युगलतः फजी अर्धसंतत है।

निर्देश

1. कैंडिल, ए. : Simon Stevin, 1989, 63, 45-66.

2. कैनिबिर, ए. : Bull. Calcutta Mathematical Soc., 1996, 88, 59-82.

3. बिन शाहना, ए. एस. : Fuzzy Sets and System, 1991, 44, 303-08.

4. चैंग, सी. एल. : J. Math. Anal. Appl. 1968, 24, 182-90.

5. आजाद, के. के. : J. Math. Anal. Appl. 1991, 82, 14-32.

6. ज़ादेह, एल. ए. : Inform and Control 1965, 8 338-53.

7. ठाकुर, एस. एस. तथा मालवीय, आर. : Fuzzy Sets and Systems. (प्रकाशनाधीन).

8. सम्पत कुमार : Fuzzy Sets and System, 1994, 62, 231-38.

9. सिंहल, एम. के. तथा नीति प्रकाश : Jour. Ind. Math. Soc.1997, 63 (1-4), 171-82.

पारिभाषिक शब्द

फज़ी (Fuzzy) = अस्पष्ट	सघन (Dense)	द्वि सांस्थितिक (Bitopological)
समष्टि (Space)	प्रतिच्छेद (Intersection)	सेट (Set) = समुच्चय
युगलतः (Pairwise)	प्रतिचित्रण (Mapping)	प्रतिवेश (Neighbourhood)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 4, October 2000

नैफ्थजैरिन के साथ कुछ कार्बनिक अम्लों के क्षारीय धातु लवणों के मिश्रित संकुल

एस. एस. चन्द्रा
रसायन विभाग, एस. एस. कालेज, तकिया, सासाराम, बिहार

ए. के. यादव
रसायन विभाग, पी. एस. सी. कालेज, कीर्तिनगर, मधीपुर, बिहार

एस. आर. प्रसाद
रसायन विभाग, पटना विश्वविद्यालय, पटना

तथा

एस. डब्ल्यू. इमाम
रसायन विभाग, एम. वी. कालेज, बक्सर, बिहार

[प्राप्त - अक्टूबर 11, 1999]

सारांश

पौधों के महत्वपूर्ण अवयव नैफ्थजैरिन के साथ कुछ कार्बनिक अम्लों के क्षारीय धातु लवणों के कई मिश्रित लिंगैड संकुलों का संश्लेषण करके, वैश्लेषिक तथा अवशोषण आँकडों के आधार पर उनकी पहचान की गई है।

Abstract

Mixed complexes of alkali metal salts of some organic acids with naphthazarin. *By* S. S. Chandra, Department of Chemistry, S. S. College, Takiya, Sasaram (Bihar), A. K. Yadav, Department of Chemistry, P.Sc. College, Kirtinagar, Madhipura (Bihar), S. R. Prasad, Department of Chemistry, Patna University, Patna (Bihar) and S. W. Imam, Department of Chemistry, M. V. College, Buxar (Bihar).

A number of mixed ligand complexes of alkali metal salts of some organic acids viz. acetylacetone, o-nitrobenzoic acid, salicylic acid, o-nitrophenol and 1-nitroso-2-naphthol with napthazarin, one of the important consituent of plants[1] having the general formula $(ML)_2 \cdot H_2L'$ where M = Li, Na or K, L = deprotonated orgainc acids and H_2L' = naphthazarin have been synthesised and characterized. Characterization of these complexes are based on analytical data and Ir-absorption data.

अपने पूर्ववर्ती कार्य को आगे बढ़ाते हुए हमने नैफ्थाजैरिन के साथ कुछ कार्बनिक अम्लों के क्षारीय धातु लवणों के कुछ नवीन मिश्रित लिगैंड संकुलों का संश्लेषण किया है और उनकी पहचान की है। नैफ्थाजैरिन एक शक्य द्विदंतुर द्विफलकीय लिगैंड है जिसमें केवल आक्सीजन ही दाता परमाणु के रूप में है। नैफ्थाजैरिन प्रकृति में भी पाया जाता है तथा रंग बन्धक रंजकों के रूप में व्यापक रूप से प्रयुक्त होता है। बोटी तथा मकियचर्न[3] ने संक्रमण धातुओं के साथ इस लिगैंड[2] के उपसंह संयोजन आचरण का विस्तार से अध्ययन किया है और उन्होंने इन संकुलों की पालीमरीय प्रकृति प्रस्तावित की है।

प्रयोगात्मक

लिगैंड की तैयारी : नैफ्थाजैरिन लिगैंड को जाहन तथा ओचवट की विधि से[4] तैयार किया गया।

विभिन्न कार्बनिक अम्लों के क्षारीय धातु लवणों की तैयारी : विभिन्न कार्बनिक अम्लों यथा ऐसीटिलैसीटोन (acac), आर्थो नाइट्रो बेंजाइक अम्ल (ONBA), सैलिसिलिक अम्ल (Sal A), आर्थो नाइट्रोफीनाल (ONP), 1-नाइट्रोसो-2- नैफ्थाल (IN2N) को पूर्ववर्णित विधि द्वारा[5] तैयार किया गया है।

मिश्रित लिगैंड संकुलों की तैयारी : नैफ्थाजैरिक (H_2L) तथा कार्बनिक अम्ल के क्षारीय धातु लवणों को 1 : 2 आणुक अनुपात में एक शंक्वाकार फ्लास्क में बेंजीन में मिलाकर संश्लेषित किया गया। सैलिसिलिक अम्ल के धातु लवण तथा 1- नाइट्रोसो-2 नैफ्थाल के साथ परम एथेनाल का प्रयोग किया गया क्योंकि विलायक के रूप में बेंजीन का प्रयोग करने से संतोषजनक परिणाम प्राप्त नहीं हुए। ऐसीटिल ऐसीटोन के पोटैशियम लवणों से बेंजीन तथा परम एथेनाल दोनों ही विलायकों के साथ ऋणात्मक परिणाम मिले। परम ऐल्कोहल में संकुलों को तैयार करते हुए सोडियम तथा लिथियम दोनों के साथ ऋणात्मक परिणाम मिले। पलिघ के अन्दर की वस्तुओं को गर्म प्लेट पर एक से तीन घंटे तक पश्चवाहित करने पर वे विलयन के रूप में आ गईं। इस तरह से प्राप्त स्वच्छ विलयन को सान्द्रित करके शीतल करने पर योगोत्पादों/एडक्टों (adducts) के जो क्रिस्टल बने उन्हें

छान कर प्रयुक्त विलायक से धोया गया और वैद्युत ओवेन में 80° से० पर सुखाया गया। 1-नाइट्रोसो-2-नैफ्थाल के लिथियम लवण का नैफ्थाजैरिन से जो संकुल बना वह कोलाइडीय होने से फिल्टरन के दौरान फिल्टर पत्र से होकर गुजर गया अतः कोलाइडीय एडक्ट को ईथर से क्रिस्टलित करके तुरन्त छाना गया और ईथर से धोकर उसे विद्युत ओवेन में सुखाया गया।

परिणाम तथा विवेचना

द्वितीय लिगैंड (H_2L') तथा नये सिरे से तैयार किये गये मिश्रित लिगैंड संकुलों $(ML)_2 . H_2L$ के कतिपय भौतिक गुणधर्म सारणी 1 में सूचीबद्ध हैं। सारे मिश्रित संकुल रंगीन और जल में विलेय हैं। ये संकुल शुष्क अवस्था में यानी डेसिकेटर में अनार्द्र $CaCl_2$ के ऊपर स्थायी है और स्टाइकियो-मीट्रिक या भौतिक गुणधर्मों में दीर्घ अवधि के बाद भी कोई परिवर्तन नहीं दर्शाते।

सारणी 1 से यह स्पष्ट है कि संकुल लिगैंडों के गलनांकों से काफी ऊपर के ताप पर या तो विघटित होते हैं या रूपान्तरित हो जाते हैं जो इसका सूचक हैं कि उनका उष्मीय स्थायित्व अधिक है।

Ir. स्पेक्ट्रा : मुख्य लिगैंड तथा अभी तक अज्ञात मिश्रित लिगैंड संकुल जो $(ML_2) . H_2L'$ प्रकार के हैं उनके अवरक्त मापन पर्किन-एल्मर स्पेक्ट्रोफोटोमीटर मॉडल 257 के द्वारा 4000-650 cm^{-1} के क्षेत्र के बीच रिकार्ड किये गये।

इन संकुलों के महत्वपूर्ण आंकडे सारणी 2 में अंकित हैं।

नैफ्थाजैरिन के स्पेक्ट्रा 1621 cm^{-1} पर तीक्ष्ण अवशोषण श्रृंग दिखलाते हैं किन्तु 3500-1800 cm^{-1} क्षेत्र में कोई अवशोषण शिखर नहीं दिखता। 1621 cm^{-1} का अवशोषण श्रृंग C = O बैंड आवृत्ति के लिए निर्दिष्टि किया गया। 1621 cm^{-1} पर C = O बैंड आवृत्ति के प्रकट होने तथा -OH बैंड आवृत्ति के अनुपस्थिति होने से हाइड्राक्सी हाइड्रोजन परमाणु तथा C = O समूह के आक्सीजन परमाणु के मध्य प्रबल अन्तराणुक हाइड्रोजन बन्धन[6] की सम्भावना बनती है। नैफ्थाजैरिन के साथ विभिन्न कार्बोनिक अम्लों के क्षारीय धातु लवणों के मिश्रित लिगैंड संकुलों के स्पेक्ट्रा में 1621 cm^{-1} पर C = O बैंड आवृत्ति यह प्रदर्शित करती है कि लगभग 20-80 cm^{-1} का विस्थापन (Shift) होता है। कार्बोनिल बैंड आवृत्ति में होने वाला यह स्थापन लिगैंड साथ धातु के उपसह संयोजन (Coordinaton) का सूचक है।

कार्बोनिल बैंड आवृत्ति में ऐसे ही विस्थापन संक्रमण धातु संकुलों में पाये जाते हैं और यह देखा गया है कि कार्बोनिल बैंड आवृत्ति में जितना अधिक विस्थापन होता है उतनी ही संकुलों में सह संयोजकता पाई जाती है। चूँकि नैफ्थाजैरिन कीलेट कार्बोनिल बैंड आवृत्ति का अधिक विस्थापन प्रदर्शित करते हैं अतः उनके अधिक प्रबल धातु आक्सीजन बन्धों के होने की आशा की जाती है।

समस्त मिश्रित लिगैंड संकुलों में कार्बोनिल बैंड आवृत्ति के अतिरिक्त भी 2700-1800 cm^{-1}

सारणी – 1 संकुलों के भौत-रासायनिक लक्षण तथा विश्लेषण

क्रमांक	यौगिक	रंग	गलनांक विघटन ताप (^{o}C)	विश्लेषण C	% H	प्राप्त N	(परिगणित) M
1	2	3	4	5	6	7	8
1.	NZ	श्यामाभ भूरा	180t – 192m	63.14 (63.16)	3.15 (3.16)	–	–
2.	$(Liacac)_2$ NZ	गहरा नील नीला	>302 m	59.55 (59.70)	4.91 (4.97)	–	3.25 (3.48)
3.	$(Naacac)_2$ NZ	राख जैसा	>303 m	55.26 (55.30)	4.57 (4.61)	–	10.03 (10.60)
4.	$(LiONBA)_2$ NA	हलका गुलाबी	> 304 m	53.72 (53.73)	2.52 (2.61)	5.20 (5.22)	2.51 (2.61)
5.	$(NaONBA)_2$ NZ	हलका गुलाबी लिए बैंगनी	264 t – 295 d	50.69 (50.70)	2.42 (2.46)	4.97 (4.93)	7.52 (8.10)
6.	$KONBA)_2$ NZ	गहरा बैंगनी	276 t – >304m	47.82 (48.00)	2.37 (2.33)	4.67 (4.66)	12.52 (13.00)
7.	$(LiSalA)_2$ NZ	गहरा गुलाबी	278 t – >304 m	60.24 (60.25)	3.33 (3.35)	–	2.81 (2.93)
8.	$(NaSalA)_2$ NZ	गहरा गुलाबी लिए बैंगनी	256 t – 283 d	56.46 (56.47)	3.11 (3.14)	–	8.51 (9.02)
9.	$(KSalA)_2$ NZ	हलका गुलाबी	>305 m	53.12 (53.14)	2.97 (2.95)	–	14.01 (14.39)

1	2	3	4	5	6	7	8
10.	$(LiONP)_2$ NZ	हलका भूरा	>304 m	54.91 (55.00)	2.94 (2.92)	5.87 (5.83)	2.51 (2.92)
11.	$(NaONP)_2$ NZ	हलका भूरा	287 d	51.52 (51.56)	2.77 (2.73)	5.48 (5.47)	8.51 (8.98)
12.	$(KONP)_2$ NZ	हलका हरा लिएं भूरा	259 t – >305 m	48.51 (48.53)	2.58 (2.57)	5.11 (5.15)	14.02 (14.34)
13.	$(Li\ 1N2N)_2$ NZ	हलका भूरा	>305 m	65.61 (65.69)	3.22 (3.28)	5.08 (5.11)	2.31 (2.55)
14.	$(Na\ 1N2N)_2$ NZ	हलका भूरा	249 t – >304 m	62.01 (62.07)	3.14 (3.13)	4.86 (4.83)	7.51 (7.93)
15.	$(K\ 1N2N)_2$ NZ	हलका श्यामाभ भूरा	268 t – >305 m	58.85 (58.82)	2.97 (2.94)	4.56 (4.57)	12.01 (12.74)

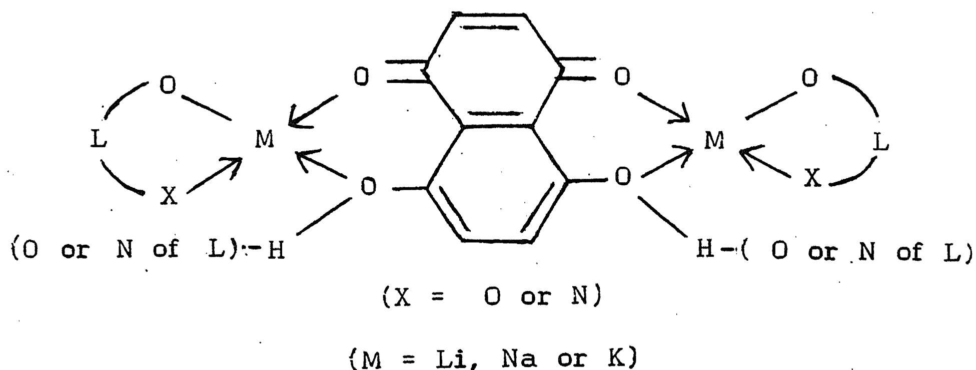
संक्षेपण :

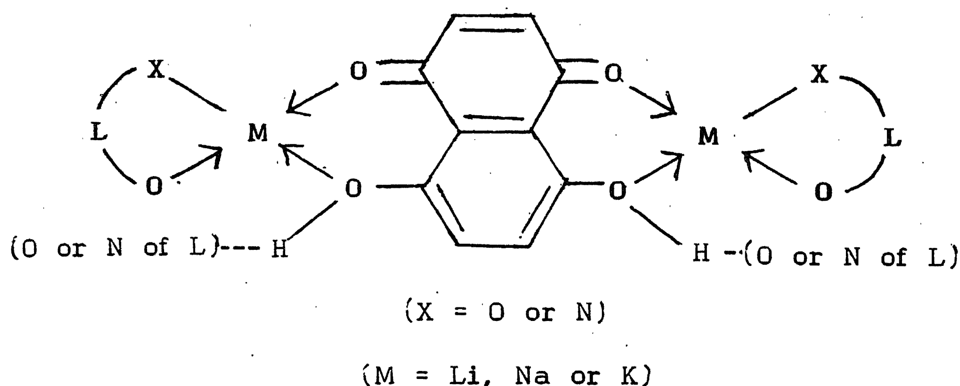
NZ	नैफ्थाज़ैरिन
acac	ऐसीटिलऐसीटोन
ONBA	*O*–नाइट्रोबेंजीन अम्ल
Sal A	सैलिसिलिक अम्ल
ONP	*O*–नाइट्रोफीनॉल
1N2N	1–नाइट्रोसो–2–नैफ्थॉल

एक बैंड क्षेत्र में प्रकट हुआ। इस क्षेत्र में मध्यम तीव्रता वाला यह चौडा बैंड हाइड्रोजन बन्धित OH समूह के कारण है और 1695-1592 cm^{-1} क्षेत्र के बैंड –COOH, >C= O, NO_2 तथा NO समूहों के कारण हैं जो विभिन्न कार्बोनिक अम्लों यानी ऐसीटिलऐसीटोन, आर्थो नाइट्रोबेंजोइक अम्ल, सैलिसिलिक अम्ल, आर्थो नाइट्रोफीनाल तथा 1-नाइट्रोसो-2 नैफ्थाल के क्षारीय धातु लवणों के कारण हैं।

संरचना तथा बन्धन

तात्विक विश्लेषण के आधार पर कीलेट पालीमरों का सामान्य सूत्र $(ML)_2 . H_2L$ आता है M = Li, Na या K, L = विप्रोटानित कार्बनिक अम्ल, यानी ऐसीटिल ऐसीटोन, आर्थो-नाइट्रोबेंजोइक अम्ल, सैलिसिलिक अम्ल, आर्थो-नाइट्रोफीनाल, 1-नाइट्रोसो-2-नैफ्थाल तथा H_2L' = नैफ्थाजैरीन। इन पालीमरों के IR स्पेक्ट्रा से यह अनुमान लगता है कि नैफ्थाजैरिन के साथ क्षारीय धातुओं का उपसंहसंयोजन –OH समूह के आक्सीजन परमाणु के माध्यम से तथा C = O समूह के आक्सीजन परमाणु के भी के भी माध्यम से होता है। इस तरह नैफ्थाजैरिन द्विदन्तुर द्विफलकीय लिगैंड के रूप में उपसहसंयोजित होता है जिससे नीचे दी गई दो प्रकार की संरचनाओं में से कोई एक संरचना बनती है।





चित्र 1, 2

सारणी 2

संकुलों के Ir-स्पेक्ट्रमी पट्ट

क्रमांक	यौगिक	प्रमुख Ir पट्ट (cm^{-1})	
		ν^{-OH}	$\nu^{C=O/C=C}$
1.	NZ	–	1621 s
2.	$(Li\ acac)_2$ NZ	1952 br	1692m, 1602 s
3.	$(Na\ acac)_2$ NZ	2322 br	1695 m, 1552 w
4.	$(NaONBA)_2$ NZ	2352 br	1615 m, 1542 m
5.	$(KONBA)_2$ NZ	2702 – 2502 br	1642 s, 1607 m, 1545 s
6.	$(Na\ SalA)_2$ NZ	1905 br	1642 sh, 1572 s
7.	$(K\ SalA)_2$ NZ	1852 – 1952 br	1662 s, 1632 s, 1580 m
8.	$(LiONP)_2$ NZ	2322 br	1642 m, 1602 s, 1552 s
9.	$NaONP)_2$ NZ	2322 br	1615 s, 1542 s
10.	$(KONP)_2$ NZ	2322 br	1612 m, 1542 m
11.	$(Na\ 1N2N)_2$ NZ	2322 br	1632 m, 1592 m, 1560 s
12.	$(K\ 1N2N)_2$ NZ	2342 br	1542 w, 1582 br

संक्षेपण

NZ	नैफ्थाज़ैरिन
acac	ऐसीटिलऐसीटोन
ONBA	*O*-नाइट्रोबेंजीन अम्ल
Sal A	सैलिसिलिक अम्ल
ONP	*O*-नाइट्रोफीनॉल
1N2N	1-नाइट्रोसो-2-नैफ्थॉल

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण पटना विश्वविद्यालय के रसायन विभाग के प्रो० धर्म प्रकाश के प्रति उनके द्वारा दिये गये सहयोग के लिए तथा सी. डी. आर. आई. लखनऊ के प्रति स्पेक्ट्रमी तथा वैश्लेषिक आँकडे प्रदान करने के लिए कृतज्ञता ज्ञापित करते हैं।

निर्देश

1. बेल, जार्ज, एच. तथा नौर्मन, जे. : Text Book of Physiology and Biochemistry, Publishers Davision and Harold, Scarborugh, ELBS, London.

2. चन्द्रा, एस. एस., इमाम, एस. डब्ल्यू., यादव, ए. के. तथा प्रसाद, एस. आर. : Orient. J. Chem., 1998, 14(3), 413-416.

3. बोटी, आर. एस. तथा मकियचर्न, सी. पी. : वही, 1970, 32, 2653.

4. ज़ाह्न, के. तथा ओचवट, पीं. : J. Amer. Chem. Soc. 1928, 50, 439.

5. प्रकाश, डी. तथा सिंह, एस. पी. : Polyhedron, 1984, 3, 243.

6. फ्लेट, एम. इत्यादि, : J. Chem. Soc. 1948, 1441.

7. बेलामी, ई. जे. : The Infrared Spectra of Complex Molecules, Vol.- I, 1975.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 4, October 2000.

सिट्रिक अम्ल किण्वन पर स्पोरुलन माध्यम तथा स्पोर सान्द्रण का प्रभाव

अफशाँ सुरैया
रसायन विभाग, जी. बी. एम. कालेज, गया
एस. एस. चन्द्रा
रसायन विभाग, एस. एस. कालेज, सासाराम
तथा
एस. पी. सिंह
रसायन विभाग, मगध विश्वविद्यालय, बोधगया (बिहार)

[प्राप्त – जुलाई 15, 2000]

सारांश

निमग्न किण्वन द्वारा सिट्रिक अम्ल के उत्पादन पर स्पोरुलन माध्यम तथा स्पोर सान्द्रण के प्रभाव का अध्ययन किया गया। जहाँ तक सिट्रिक अम्ल की उपलब्धि का प्रश्न है सबुरौद का ऐगार सर्वश्रेष्ठ स्पोरुलन माध्यम पाया गया। फिर भी स्पोरों की अधिकतम संख्या SM_3 माध्यम में सात दिनों में देखी गई। इष्टतम स्पोर सान्द्रण /मिली. तब मिला जव उत्पादन माध्यम को बीज माध्यम के द्वारा इनाकुलेट किया गया।

Abstract

Effect of sporulation medium and spore concentration on citric acid fermentation *By.* Afshan Suraiya, Department of Chemistry, G. B. M. College, Gaya, S. S. Chandra, Dept. of Chemistry, S. S. College Sasaram and S. P. Singh, Department of Chemistry, Magadh University, Bodh-Gaya (Bihar).

The effect of sporulation medium and spore concentration on citric acid production by submerged fermentation has been studied. It has been observed that Saburaud's agar remains the best sporulation medium as far as the citric acid yields are concerned. However, maximum number of spores are obtained on SM_3 medium in seven days. So far as the spore concentration is concerned it has been found to be $(1–2) \times 10^6$/ml optimum when the production medium is inoculated through the seed medium.

निमग्न किण्वन विधि से सिट्रिक अम्ल उत्पादन पर स्पोरुलन माध्यम तथा स्पोर सान्द्रण का बहुत विस्तार से अध्ययन नहीं हुआ।[1, 2] हमने ऐस्पर्जिल्स नाइजर के एक विभेद को पृथक करके प्रयोगशाला में सिट्रिक अम्ल उत्पादंन की विधि विकसित की है।[3-5] प्रस्तुत सूचना में निमग्न किण्वन विधि द्वारा सिट्रिक अम्ल के उत्पादन पर स्पोरुलन माध्ययम तथा स्पोर सान्द्रण के प्रभाव का विवरण दिया जा रहा है।

विभेद : प्रस्तुत अध्ययन के लिए ऐस्पर्जिलस नाइजर का प्रयोग हुआ।

सूक्ष्मजीवों की छँटनी : विभिन्न स्थानों से मिट्टी के नमूने एकत्र करके स्ट्रेप्टोमाइसीन रोज़ बेंगाल ऐगार पर अनवरत तनुता विधि के द्वारा प्लेटित किया गया। इन प्लेटों को 30° से० पर 5 दिनों तक इनक्यूबेट किया गया और ऐस्पर्जिलस नाइजर की कालोनियों को स्थानान्तरित किया गया।

उत्पादन माध्यम - उत्पादन माध्यम तैयार किया गया जिसका संघटन निम्नवत् था-

सुक्रोस 140 ग्रा., NH_4NO_3 : 1.5 ग्रा KH_2PO_4 : 0.28 ग्रा. $MgSO_4$: 0.25 ग्रा.

आसुत जल 1 ली., pH : 4.5 – 5.0, ताप 29–30° से.

स्पोरुलन माध्यम : निम्नांकित माध्यमों का प्रयोग किया गया-

SM_1 – (साबूरोद ऐगार) : ग्लुकोस 40 ग्रा.; पेप्टोन 10 ग्रा. तथा ऐगार 10 ग्रा/ली०

SM_2 – (ज़ापेक–डाक्स ऐगार) : सुक्रोस 30 ग्रा., $MgSO_4.7H_2O$:0.5 ग्रा.
KCl : 0.5 ग्रा. $NaNO_3$: 20 ग्रा; KH_2PO_4 : 1.5 ग्रा
$FeSO_4$: 0.01 ग्रा. तथा ऐगार 20 ग्रा./ली.

SM_3 – शीरा 7.5 ग्रा. ग्लीसरीन : 10 ग्रा., NaCl : 20 ग्रा., यीस्ट : 5 ग्रा.,
$MgSO_4.7H_2$: 0.005 ग्रा. KH_2PO_4 : 0.006 ग्रा.
$Fe(NH_4)_2(SO_4)_3.6H_2O$: 0.016 ग्रा. $CuSO_4.5H_2O$: 0.001 ग्रा
$CaSO_4.2H_2O$:0.25 ग्रा. तथा ऐगार 20 ग्रा./ली.

SM_4 – SM_3 + पेप्टोन 10 ग्रा./ली.

SM_5 – ग्लूकोस : 10ग्रा., पेप्टोन 10 ग्रा., NaCl तथा ऐगार 20 ग्रा./ली.

SM_6 – शीरा : 7.5 ग्रा.ग्लीसरीन 7.5 ग्रा. पेप्टोन 10 ग्रा. तथा ऐगार 20 ग्रा./ली.

SM_7 – सुक्रोस : 25 ग्रा., मांस निष्कर्ष : 10 ग्रा., NaCl 0.5 ग्रा., ऐगार 20 ग्रा./ली.

SM_8 – सुक्रोस : 140 ग्रा.; $NH4NO_3$: 2.5 ग्रा.
$MgSO_4.7H_2O$: 0.25 ग्रा., KH_2PO_4 : 1.0 ग्रा. तथा ऐगार 20 ग्रा/ली.

इनाकुलेशन तथा इनक्यूबेशन : साबुरोरूद ऐगार से स्पोरों को T-80 जल (0.1%) का सहायता से विलग करके बीज माध्यम में 1×10^6 स्पोर/मिली की दर से इनाकुलेट किया गया। इनाकुलेट किये गये बीज माध्यम को रोटरी शेकर में (220 चक्र/मिनट) 30^o पर 48 घंटे तक इनक्युबेट किया गया। तत्पश्चात् इसे 3% की दर से उत्पादन माध्यम में इनाकुलेट किया गया। तब इसे 30^o से. पर रोटरी शेकर में इनक्युबेट किया गया।

विश्लेषण विधि : सम्पूर्ण अम्लता को 0.1N NaOH द्वारा अनुमापन विधि से ज्ञात किया गया। सिट्रिक अम्ल का आमापन लियोपोल्ड तथा वाल्ट्र विधि से और सिट्रिक अम्ल की शुद्धता को पत्र क्रोमैटोग्राफी विधि से ज्ञात किया गया। सिट्रिक अम्ल की प्रतिशतता प्रारम्भिक शर्करा के आधार पर परिगणित की गई। अवशिष्ट शर्करा का मापन कोल्स विधि[7] से किया गया।

स्पोर गणना - ऐगार स्लांटों से स्पोर अलग किये गये और उपयुक्त तनुता के बाद हीमोसाइटोमीटर पर गणना की गई।

परिणाम तथा विवेचना

स्पोरुलेशन माध्यम तथा स्पोर सान्द्रण का निमग्न किण्वन द्वारा सिट्रिक अम्ल के उत्पादन पर जो प्रभाव पड़ता है, उसे सारणी 1 तथा 2 में दिया जा रहा है।

सारणी 1
सिट्रिक अम्ल उत्पादन पर स्पोरुलेशन का प्रभाव

माध्यम	स्पोरुलेशन का समय	प्रति वर्ग सेमी० क्षेत्रफल में स्पोरों की संख्या	सिट्रिक अम्ल	
			मिग्रा०/मिली०	% रूपान्तरण
SM_1	42	2.30×10^7	114.00	81.42
SM_2	5	5.26×10^7	41.50	29.64
SM_3	7	5.79×10^7	109.80	78.42
SM_4	10	5.26×10^7	82.00	58.57
SM_5	15	3.59×10^7	92.10	65.78
SM_6	10	5.26×10^7	80.25	57.32
SM_7	15	5.29×10^7	90.88	64.91
SM_8	15	2.99×10^7	48.76	34.82

इनक्यूबेशन अवधि : 8 दिन; उत्पादन माध्यम शर्करा 140; KH_2PO_4 : 0.25 ग्रा./लीटर $MgSO_4$: 0.25 और NH_4NO_3 ग्रा./लीटर

सारणी 2
सिट्रिक अम्ल उत्पादन पर स्पोर सान्द्रता का प्रभाव

स्पोर/मिली०	सिट्रिक अम्ल		बीज की आकारिकी
	मिग्रा०/मिली०	% रूपान्तरण	
1×10^4	बीज माध्यम में बहुत बड़ी गुटिकाएँ		बीज में बहुत बड़ी-बड़ी गुटिकाएं अतः उत्पादन में इनाकुलेशन नहीं किया गया
2×10^4	,,	,,	
1×10^5	70.25	50.17	गुटिका का आकार 1–2 मिमी०
1×10^5	96.50	68.92	गुटिका का आकार 0.5–1 मिमी०
1×10^6	115.40	82.42	गुटिका का आकार 0.3–0.7 मिमी०
2×10^6	117.35	83.82	गुटिका का आकार 0.3–0.7 मिमी०
4×10^6	103.80	74.14	तन्तुमयी वृद्धि
1×10^7	96.75	69.10	तन्तुमयी वृद्धि

इनक्यूबेशन अवधि : 8 दिन; उत्पादन माध्यम : शर्करा १४० ग्रा./लीNH_4NO_3 1.5ग्रा./ली.KH_2PO_4 : 0.25; $MgSO_4$: 0.25 ग्राम/लीटर

स्पोरुलन माध्यम का प्रभाव - साबूरोद माध्यम में स्पोरुलन में 6 सप्ताह लगते हैं। अतः तीव्र स्पोरुलन के लिए माध्यम ज्ञात करने के लिए आठ भिन्न-भिन्न माध्यमों के साथ प्रयोग किये गये। इन माध्यमों से स्पोरों को निकाल कर बीज माध्यम (seed medium) में, तत्पश्चात् उत्पादन माध्यम में इनाकुलेट किया गया। सारणी 1 से ज्ञात होता है कि जहाँ तक सिट्रिक अम्ल उपलब्धियों का प्रश्न है, साबुरोद माध्यम ही सर्वश्रेष्ठ है किन्तु SM_3 माध्यम में 7 दिनों में अधिकतम स्पोर पाये जाते हैं और सिट्रिक अम्ल की उपलब्धि साबुरोद माध्य के समतुल्य होता है। अन्य माध्यमों के स्पोरों से इतना सिट्रिक अम्ल नहीं बना।

स्पोर सान्द्रण का प्रभाव : सारणी 2 से स्पष्ट हो जाता है कि जब उत्पादन माध्यम को बीज माध्यम द्वारा इनाकुलेट किया जाता है तो स्पोर सान्द्रण इष्टतम ($1 - 2 \times 10^6$ /मिली) होता है।

निर्देश

1. चोपरा, सी. एल. गैंड, सी. एन. क्वाजी, जी. एन., चतुर्वेदी, एस. के. तथा सोमल, पी. Rearch and Industry, 1983, 28, 108.

2. प्रेस्काट, एस. सी. तथा डन., सी. जी. : Industrial Microbiology, मैकग्राहिल्स एण्ड कम्पनी, न्यूयार्क कोगाकुशा कं० लि० टोकियो

3. सिन्हा, एल. के., सिंह, एस. पी., राठौर, एन., सिन्हा, आर. पी. तथा सिंह, बी. के. : Indian J. agric. Chem., 1988, 21, 43.

4. सिंह, एस. पी., प्रसाद, अजय तथा प्रसाद, अखिलेश्वर : Indian J. Agric. Chem. 1993, 26, 107.

5. सिंह, एस. पी., वर्मा, ए. के., सिंह, बी. के., तथा कमल, के. पी. : Asain J. Chem. 1997, 9, 886

6. लियोपोल्ड, एच. तथा वाल्ट्र. : Nahrung, 1958, 2, 532

7. कोल्स, एस. डब्ल्यू. Practical Physiological Chemistry (डब्ल्यू, बेफर लि० कैम्ब्रिज, इंगलैंड), 167, (1942).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 4, October, 2000.

बहुचरीय हरमाइट बहुपदों के कुछ संबंध

एच. एस. पी. श्रीवास्तव

गणित विभाग, शासकीय कला एवं विज्ञान स्नोतकोत्तर महाविद्यालय, रतलाम (म. प्र.)

[प्राप्त –जुलाई 27, 2000]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में बहुचरीय हरमाइट बहुपदों के कुछ संबंध ज्ञात किये गये हैं। इनसे कुछ विशिष्ट दशाएँ भी निकाली गई हैं।

Abstract

Some relations of multivariable Hermite polynomial. *By* H. S. P. Shrivastava, Mathematics Department, Govt. Arts and Science P. G. College, Ratlam (M. P.).

Some relations of Hermite polynomial of several variables are established. Few particular cases are also discussed.

1. प्रस्तावना

बहुपदों के सिद्धांत एवं एक तथा अनेक चरों वाले हाइपरज्यामितीय फलनों में एकतानता लाने के प्रयास में लेखक ने बहुचरीय हरमाइट बहुपद को परिभाषित किया है[3]।

m-चरों वाला हरमाइट बहुपद

$$Hn\left(x_1, x_2, x_m\right) = \sum_{r_1=0}^{n/2} \sum_{\substack{r_j=0 \\ (j=2,3,\ldots m)}}^{[n/2 - \sum_{p=1}^{j-1} r_p]} \frac{n!\,(2x_1)^{n-2\sum_{j=1}^{m} r_j} (-1)^{r_m} \prod_{j=1}^{m-1} (-x_{m+1-j})^{r_j}}{\left(n - 2\sum_{j=1} r_j\right)!\ \prod_{j=1}^{m} r_j!} \tag{1.1}$$

$$= \left(2x_1\right)^n F^{1:0;\ldots;0}_{0:0;\ldots;0}\left[\begin{array}{l}(-n;\,2,\ldots,2):\ldots;\ldots;\ldots;\\ \quad\quad\quad\quad\ldots:\ldots;\ldots;\ldots;\end{array}\right.$$

$$\left.\times\left(-\frac{x_m}{4x_1^2}\right),\left(-\frac{x_2}{4x_1^2}\right),\left(\frac{-1}{4x_1^2}\right)\right] \quad (1.2)$$

जहाँ पर F-फलन m-चरों का व्यापकीकृत लॉरीसेला फलन है जिसे श्रीवास्तव तथा दाओस्त [4, eq. (4.1), p. 454] ने परिभाषित किया।

m = 3 के लिए हमें तीन चरों वाला निम्न हरमाइट बहुपद प्राप्त होता है। इसी प्रकार अधिक चरों का हरमाइट बहुपद प्राप्त किया जा सकता है।

$$H_n(x, y, z) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \sum_{s=0}^{[n/2-r]} \sum_{u=0}^{[n/2-r-s]} \frac{n!\,(2x)^{n-2r-2s-2u}\,(-1)^u\,(-z)^r\,(-y)^s}{(n-2r-2s-2u)!\,r!\,.\,s!\,.\,u!\,.} \quad (1.3)$$

एवं इसका जनक-फलन निम्नलिखित प्रकार का होगा :

$$\exp\left[2xt-(z+y+1)t^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x, y, z),\ t^n}{n!} \quad (1.4)$$

m-चरों वाले हरमाइट बहुपद का जनक-फलन निम्नवत् होता है :

$$\exp\left[2xt-\left(x_m+x_{m-1}+\ldots+x_3+x_2+1\right)t^2\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x_1, x_2, \ldots, x_m)\ t^n}{n!} \quad (1.5)$$

जबकि बहुचर्चित हरमाइट बहुपद एवं इसका जनक-फलन निम्नलिखित प्रकार के होते हैं [1, eq. (1), (2), p. 187]

$$H_n(x) = \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r\ n!\ (2x)^{n-2r}}{n!\ (n-2r)!} \quad (1.6)$$

और

$$\exp\left[2xt - t^2\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)\, t^n}{n!} \tag{1.7}$$

2. संबंध

इस अनुभाग में हम निम्नलिखित कुछ संबंधों को सिद्ध करेंगे :-

$$H_n(\lambda x, y, z) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (2x(\lambda - 1))^k H_{n-k}(x, y, z) \tag{2.1}$$

$$H_n\left(\lambda x_1, x_2, \ldots, x_m\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(2x_1(\lambda - 1)\right)^k H_{n-k}\left(x_1, \ldots, x_m\right) \tag{2.2}$$

$$H_n(x, \lambda y, z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!\, (y(1-\lambda))^k H_{n-2k}(x, y, z)}{k!\, (n-2k)!} \tag{2.3}$$

$$H_n\left(x_1, \lambda x_2, x_3, \ldots, x_m\right) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!\, (x_2(1-\lambda))^k H_{n-2k}(x_1, \ldots, x_m)}{k!\, (n-2k)!} \tag{2.4}$$

$$H_n(x, y, \lambda z) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!\, (z(1-\lambda))^k H_{n-2k}(x, y, z)}{k!\, (n-2k)!} \tag{2.5}$$

$$H_n\left(x_1, \ldots, x_{m-1}, \lambda x_m\right) = \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{n!\, (x_m(1-\lambda))^k H_{n-2k}(x_1, \ldots, x_m)}{k!\, (n-2k)!} \tag{2.6}$$

$$H_n(\lambda x, \mu y, \nu z) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{n!\, H_{n-r-2s}(x, y, z)\, H_r\{(\lambda-1)x, (\mu-1)y, (\nu-1)z\}}{r!\, s!\, (n-r-2s)!} \tag{2.7}$$

$$H_n\left(\lambda x_1, \lambda_2 x_2, \ldots, \lambda_m x_m\right)$$

$$=\sum_{r=0}^{n}\sum_{s=0}^{[n/2]} \frac{n!\,H_{n-r-2s}(x_1,\ldots x_m)\,H_r((\lambda_1-1)x_1,\ldots,(\lambda_{m-1}-1\ x_m))}{r!\,s!\,(n-r-2s)!} \tag{2.8}$$

(2.1) की उपपत्ति

$$\exp\left[2\lambda xt-(z+y+1)t^2\right]=\exp\left[2xt-(z+y+1)t^2\right]\exp[2(\lambda-1)xt].$$

जनक-फलन सूत्र (1.4) एवं $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है :

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\lambda x, y, z)\,t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_n(x, y, z)\,(2xt(\lambda-1)^k t^{n+k})}{n!\,k!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{H_{n-k}(x, y, z)\,(2xt(\lambda-1)^k t^n)}{(n-k)!\,k!}$$

दोनों ओर के t^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें सूत्र **(2.1)** प्राप्त होता है। इसी प्रकार सूत्र **(2.2)** से (2.6) को सिद्ध किया जा सकता है।

(2.7) की उत्पत्ति

$$\exp\left[2\lambda xt-(\nu z+\mu y+1)t^2\right]=\exp\left[2xt-(z+y+1)t^2\right]$$

$$\times\exp\left[2(\lambda-1)xt-\{(\nu-1)z+(\mu-1)y+1)\ t^2\right]\exp(t^2)$$

जनक-फलन सूत्र **(1.4)** एवं सूत्र $\exp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ का प्रयोग करने पर हमें प्राप्त होता है:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(\lambda x, \mu y, \nu z)\,t^n}{n!}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{H_n(x, y, z)\,H_r((\lambda-1)x, zy(\mu-1), (\nu-1)z)\,t^{n+r+2s}}{n!\,r!\,s!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{n/2} \frac{H_{n-r-2s}(x, y, z) H_r((\lambda - 1)x, z(\mu - 1), (\nu \quad 1) z) t^n}{(n - r - 2s)!\, r!\, s!}$$

दोनों ओर के t^n के गुणांकों की तुलना करने पर हमें वांछित सूत्र (2.7) प्राप्त होता है। इसी प्रकार सूत्र (2.8) को भी सिद्ध किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशाएँ

(i) सूत्र (2.1) से (2.4) एवं (2.7) तथा (2.8) में z = 0 रखने पर हमें दो चरों वाले हरमाइट बहुपद के सूत्र प्राप्त होंगे क्योंकि

$$H_n(x, y, 0) = H_n(x, y) \qquad (3)$$

(ii) सूत्र (2.1) में y = z = 0 रखने पर हमें बहुचर्चित एक फलन के हरमाइट बहुपद का निम्नलिखित सूत्र प्राप्त होगा क्योंकि *Hn (x,* 0, 0) = *Hn (x),* [3],

$$H_n(\lambda x) = \sum^{n} \left(\frac{n}{k}\right) \{2x(\lambda - 1)\}^k H_{n-k}(x). \qquad (3.1)$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक यू. जी. सी. (इंडिया) के प्रति अपना आभार व्यक्त करता है जिसने लेखक को उसकी शोध परियोजना के रूप में वित्तीय सहायता प्रदान की है।

निर्देश

1. रेनविले, ई. डी. : Special Functions, The MacMillan & Co. N.Y (1967).
2. श्रीवास्तव, एच. एस. पी. : Int. Trans. and Spec. Funct. 2000, 10(1), 61-70.
3. श्रीवास्तव, एच. एस. पी.: J. Indian Acad. Math. (प्रेषित)
4. श्रीवास्तव, एच. एम. तथा मनोचा, एच. एल. : A Treatise on Generating Functions, John Wiley & Sons, NY (1984).
5. श्रीवास्तव, एच. एम., गुप्ता, के. सी. तथा गोयल, एस. पी. : The H-function of one and two Variables with Applications, South Asian Publ. New Delhi, (1982).

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika, Vol. 43, No. 4, October 2000.

कैडमियम और जिंक की अन्योन्य क्रिया का अध्ययन

शिव गोपाल मिश्र तथा दिनेश मणि
शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त – मार्च 25, 2000]

सारांश

पौधों तथा मिट्टी पर भारी धातुओं के संभावित हानिकारक प्रभाव को कम करने के उद्देश्य से कैडमियम और जिंक के मध्य अन्योन्य क्रिया का अध्ययन किया गया। इसके लिए पालक तथा मेंथी को सूचक फसलों के रूप में चुना गया और 45 दिन के बाद इनका बायोमास ज्ञात किया गया।

अध्ययन के फलस्वरूप यह पाया गया कि अकेले कैडमियम की उपस्थिति में पालक तथा मेथी दोनों फसलों की उपज कम हुई जबकि कैडमियम तथा जिंक दोनों का साथ-साथ प्रयोग करने पर दोनों फसलों की उपज अधिक मिली। यही नहीं, अकेले कैडमियम डालने पर पालक तथा मेथी के तनों (पत्ती सहित) और जड़ों में कैडमियम की सान्द्रता अधिक पाई गई। कैडमियम तथा जिंक दोनों का साथ-साथ प्रयोग करने पर कैडमियम की सान्द्रता घट गई।

Abstract

Interaction between cadmium and zinc. *By* S. G. Misra and Dinesh Mani, Sheila Dhar Institute of Soil Science, University of Allahabad, Allahabad.

In order to mitigate the possible adverse effect of heavy metals on soils and plants, interaction between cadmium and zinc was studied. Two vegetable crops, spinach and fenugreek, were grown as test crops. Total biomass was determined after 45 days of sowing. It was observed that cadmium alone reduced the yield of both the crops but when used with zinc, it enhanced the yield of both the crops. The concentration of cadmium in shoots and roots of spinach and fenugreek crops was more in Cd-treated pots than is in Cd × Zn treated pots.

अन्य प्रकार के प्रदूषण की भाँति ही मिट्टी तथा जल प्रदूषण भी निरतंर बढ़ रहा है और इस सन्दर्भ में भारी धातुएँ विशेष रूप से चर्चा का विषय बनी हुई हैं। पौधों के अंकुरण, बढ़वार तथा उपज पर भारी धातुओं यथा - कैडमियम, क्रोमियम, लेड इत्यादि का हानिकारक प्रभाव पड़ता है [1, 2]। पौधों के खाद्य भागों, विशेष रूप से पत्तियों में भारी धातुओं के संचय की प्रवृत्ति की पुष्टि हो चुकी है।[3] पौधों द्वारा कैडमियम तथा लेड के अवशोषण से फसल की उपज एवं उसकी गुणवत्ता पर बुरा प्रभाव पड़ता है[4]। भारी धातुएँ आपस में तथा अन्य पोषक तत्वों के साथ प्रतिरोधी (Antagonistic) तथा योगवाही (Synergistic) अन्योन्य क्रियाएँ करती हैं,[5] किन्तु अभी इस दिशा में कोई विशेष कार्य नहीं हुआ। फलतः हमने मिट्टी में कैडमियम तथा जिंक के मध्य अन्योन्य क्रिया का विस्तृत अध्ययन पत्तीदार हरी सब्जियों पर संभावित प्रभाव जानने के उद्देश्य से किया।

प्रयोगात्मक

हमने शीलाधर मृदा विज्ञान संस्थान के प्रायोगिक फार्म की मिट्टी का प्रयोग दो पत्तीदार फसलों को उगाने के लिए किया। ये प्रयोग मिट्टी के गमलों में किए गए। इस मिट्टी के भौतिक एवं रासायनिक गुणधर्म इस प्रकार थे।

मृत्तिका (क्ले)	34.8%
धनायन विनिमय क्षमता	19.8 C mol (P^+) kg^{-1}
कार्बनिक कार्बन	0.52 %
डी.टी.पी.ए. निष्कर्षणीय कैडमियम	0.30 पी.पी.एम.
पी. एच.	7.5
कणाकार	सिल्टी क्ले लोम

प्रत्येक गमले में 5 किलोग्राम मिट्टी ली गई और जिंक को जिंक सल्फेट के रूप में 0, 10, 20 तथा 30 पी.पी.एम. की दर से मिलाया गया। इसी प्रकार कैडमियम को कैडमियम कार्बोनेट के रूप में 0, 10, 20, तथा 40 पी. पी. एम. की दर से डाला गया। सभी गमलों में NPK की आवश्यक मात्राएँ 50-50-50 कि. ग्रा./हे. यूरिया, सिंगल सुपरफास्फेट, म्यूरेट ऑफ पोटाश के रूप में बेसल ड्रेसिंग के द्वारा दी गईं। 24 घंटे बाद बीज की बुवाई की गई। 5-6 दिन के अन्तराल पर सिंचाई की गई। 45 दिन बाद फसल उखाड़ ली गई।

पौधों के तनों (पत्तियों सहित) एवं जड़ों के नमूने ट्राई-एसिड मिश्रण (750 ml. conc. HNO_3, 150 ml conc. H_2SO_4 तथा 300 ml. $HClO_4$) में पाचित किये गए तथा इस पाचित निष्कर्ष में कैडमियम की सान्द्रता एटॉमिक एब्जार्ब्शन स्पेक्ट्रोफोटोमीटर से ज्ञात की गई।

सारणी 1

कैडमियम × जिंक की अन्योन्य क्रिया का पालक की उपज (शुष्क पदार्थ) तथा तनों व जड़ों में कैडमियम की सान्द्रता पर प्रभाव

कैडमियम की दर (पी.पी एम.)	जिंक स्त्रोत	जिंक की दर (पी.पी एम.)	उपज ग्राम/गमला	कैडमियम की सान्द्रता (पी.पी एम.)	
				तना (पत्ती सहित)	जड़
0	जिंक सल्फेट	0	600	0.22	0.36
		10	800	0.32	4.00
		20	900	0.28	0.20
		30	850	0.30	0.25
10	जिंक सल्फेट	0	500	4.00	5.60
		10	600	1.80	4.90
		20	800	0.70	1.20
		30	700	0.60	1.10
20	जिंक सल्फेट	0	200	6.10	10.40
		10	750	7.20	9.20
		20	800	3.80	3.60
		30	700	4.20	4.70
40	जिंक सल्फेट	0	100	9.00	18.20
		10	900	8.20	16.40
		20	600	4.20	7.60
		30	500	5.00	5.20

परिणाम तथा विवेचना

कैडमियम तथा जिंक की विभिन्न मात्राओं के प्रयोग से पालक और मेथी के बायोमास से सम्बन्धित परिणाम सारणी 1 तथा सारणी 2 में दिए गए हैं। कैडमियम की बढ़ती मात्रा के साथ दोनों फसलों की उपज प्रभावित हुई। जिंक की 20 पी. पी. एम. की मात्रा के स्तर पर पालक तथा मेथी दोनों की उपज में सर्वाधिक वृद्धि हुई।

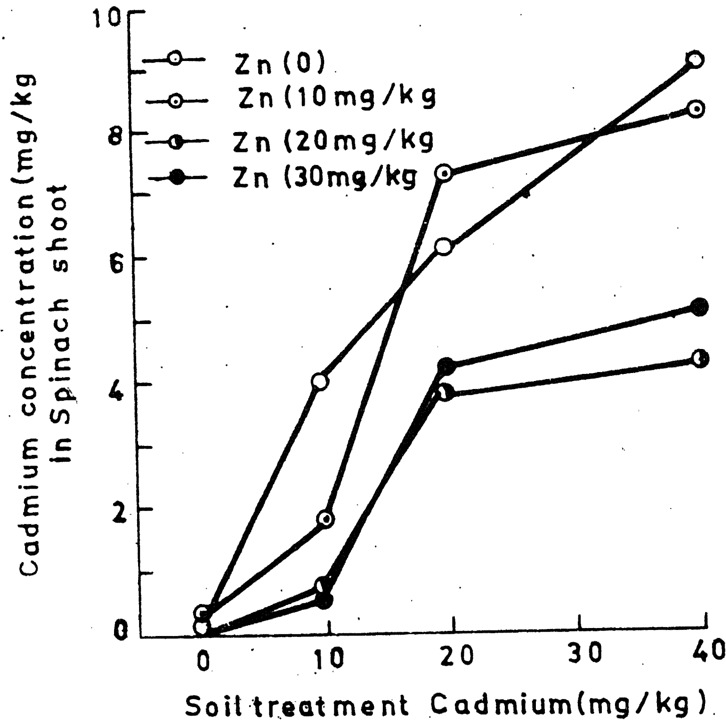
कैडमियम का सान्द्रण

कैडमियम की बढ़ती मात्रा के साथ पालक तथा मेथी के तने (पत्तियों सहित) में कैडमियम के सान्द्रण में वृद्धि दिखाई दी। पौधों के ऊतकों में कैडमियम की अधिक मात्रा मिट्टी में कैडमियम की अधिक उपलब्धता के कारण सम्भव है। जब कैडमियम को जिंक के साथ प्रयोग किया गया तो पौधों में कैडमियम की सान्द्रता में कमी पाई गई। यह कमी जिंक की 20 पी. पी. एम. मात्रा के स्तर पर सबसे कम देखी गई। (चित्र 1)

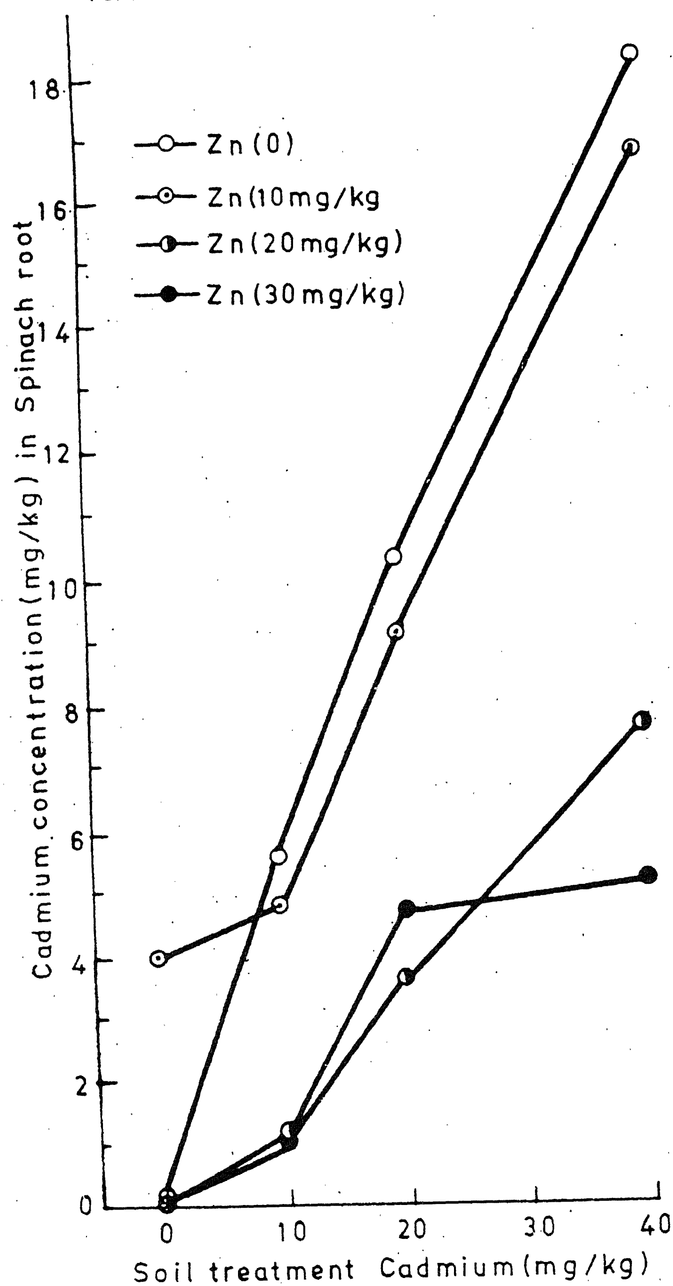
सारणी 2

कैडमियम × जिंक की अन्योन्य क्रिया का मेथी की उपज (शुष्क पदार्थ) तथा तनों व जड़ों में कैडमियम की सान्द्रता पर प्रभाव

कैडमियम की दर (पी.पीएम.)	जिंक स्रोत	जिंक की दर (पी.पी एम.)	उपज ग्राम/गमला	कैडमियम की सान्द्रता (पी.पी एम.)	
				तना (पत्ती सहित)	जड
0	जिंक सल्फेट	0 10 20 30	450 750 850 500	0.14 0.16 0.18 0.60	1.50 1.50 0.66 0.68
10	जिंक सल्फेट	0 10 20 30	500 550 750 600	2.80 0.90 1.40 1.60	7.10 2.60 1.80 1.90
20	जिंक सल्फेट	0 10 20 30	200 600 750 600	6.30 3.80 1.80 1.90	10.20 7.60 2.80 2.90
40	जिंक सल्फेट	0 10 20 30	200 250 600 400	9.60 9.50 4.60 5.20	24.20 16.00 6.00 6.60

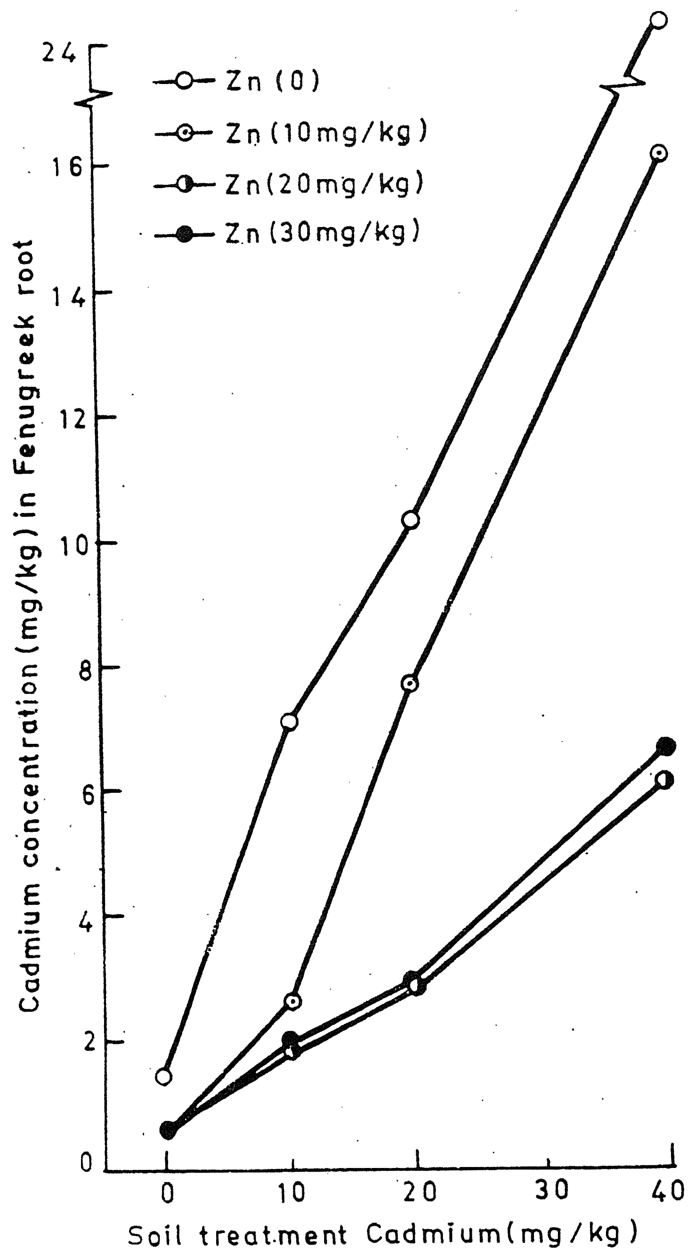


चित्र 1



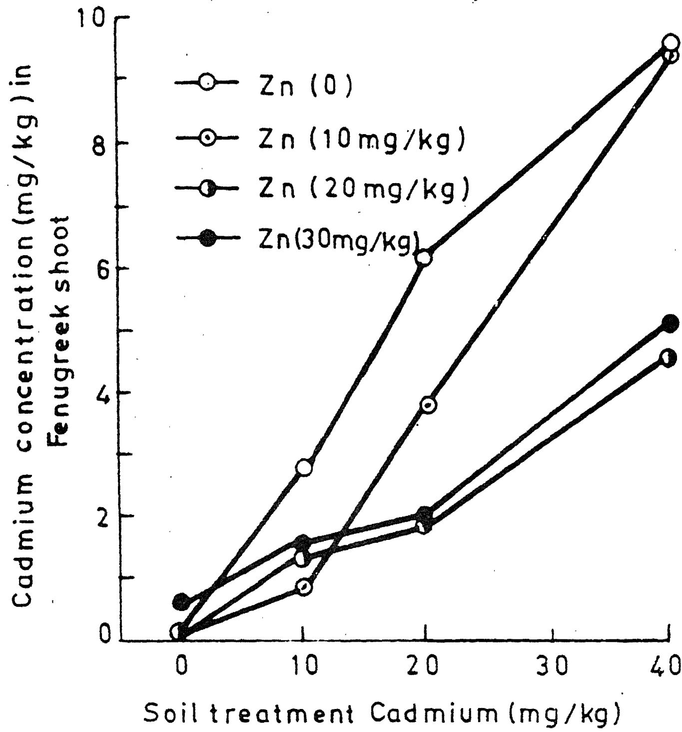
चित्र 2

समस्त उपचारों में पौधों की जड़ों में संचित कैडमियम की मात्रा तनों की तुलना में अधिक पाई गई। (चित्र 2)



चित्र 3

अब्देल-साबोर[6] इत्यादि नें भी पौधों में कैडमियम तथा जिंक के संबंध में इसी प्रकार की प्रवृत्ति पाई।(चित्र 3 तथा चित्र 4)



चित्र 4

कैडमियम तथा जिंक की इस अन्योन्य क्रिया को उत्प्रेरित करने में मिट्टी में पहले से विद्यमान कार्बनिक पदार्थ, फास्फोरस तथा कैल्सियम की अधिक मात्रा विशेष भूमिका निभाते हैं।

इस प्रकार मिट्टी में कार्बनिक पदार्थ, फास्फोरस, कैडमियम तथा जिंक की मात्रा बढ़ाकर कैडमियम की विषाक्तता को कम किया जा सकता है।

निर्देश

1. जॉन, एन. के., वान लारहोवेन, सी. जे. तथा चाट, एच. एच. : Environ. Sci. Tech., 1972, **6**, 1005-1009.

2. वान स्कारर, के. तथा स्क्रूप, डब्ल्यू. : Z. Pflansener nahrung dung Bodenk, 1936, **43**, 34-43.

3. डोडी, आर. एन. तथा लाइसन, डब्ल्यू. ई. : J. Environ Qual. 1975, **4**, 278-82.

4. जॉन, एम. के. : J. Environ. Pollut. 1976, **11**, 85-95.

5. हासेट, जे. जे., मिलर, जे. ई. तथा कापे, डी. ई. : J. Environ. Pollut. 1976, **11**, 297-302.

6. अब्देल-साबोर, एम. एफ., मांर्टवेट, जे. जे. तथा केल्सो जे. जे. : Soil Science, 1945, **6**, 424-431.

लेखकों से निवेदन

- विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हैं और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका को होना चाहिये।
- लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।
- अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कार्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये पाँच रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।
- लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे K_4FeCN_6 अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।
- ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।
- प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिए । अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstract) में इनसे सहायता ली जा सके।
- प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।
- लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायेंगे। पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume)और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से

  फॉवेल, आर० आर० तथा म्युलर, जे०, जाइट फिजिक० केमि०, 1928, 150, 80
- प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) **एक सौ** रुपये मूल्य दिये जाने पर उपलब्ध हो सकेंगे।
- लेख "सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

प्रबन्ध सम्पादक

मूल्य

वार्षिक मूल्य : 100 रु० या 20 पौंड या 50 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 25 रु० या 6 पौंड या 10 डालर

Rates

Annual Rs. 100 or £ 20 or $ 50
Per Vol. Rs. 25 or 6 £ or $ 10

प्रकाशक :

विज्ञान परिषद् प्रयाग
महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2

Vijnana Parishad Prayag
Maharshi Dayanand Marg
Allahabad-2 (India)

मुद्रक : कम्प्यूटर कम्पोजर्स
7 बेली एवेन्यू, इलाहाबाद
फोन : 640854, 640405